

**Projekt:** Digitální učební materiály ve škole, registrační číslo projektu CZ.1.07/1.5.00/34.0527

**Příjemce:** Střední zdravotnická škola a Vyšší odborná škola zdravotnická, Husova 3, 371 60 České Budějovice

**Název materiálu:** Vlastnosti funkcí

**Autor materiálu:** Mgr. Jana Lvová

**Datum vytvoření:** 2. 8. 2013

**Zařazení materiálu:**

**Šablona:** Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (III/2)

**Předmět:** Matematika, 2. ročník

**Sada:** MA2

**Číslo DUM:** 04

**Tematická oblast:** Funkce, rovnice a nerovnice, slovní úlohy

**Ověření materiálu ve výuce:**

**Datum ověření:** 19. 11. 2013

**Ověřující učitel:** Mgr. Jana Lvová

**Třída:** ZLY 2.

**Popis způsobu použití materiálu ve výuce:** Elektronická prezentace, která je určena pro výuku základních poznatků o vlastnostech funkcí ve všech oborech vzdělání na střední zdravotnické škole. Prezentace seznamuje žáky se základními vlastnostmi funkcí. Může sloužit jako názorná pomůcka během výkladu nového učiva nebo při opakování již probrané látky. Také je vhodná pro domácí přípravu žáků. Je využitelná rovněž jako součást e-learningu. Materiál obsahuje zpětnou vazbu ověřující pochopení látky v podobě snímků s úkoly.

**Tento výukový materiál je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.**



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# **VLASTNOSTI FUNKCÍ**

# FUNKCE ROSTOUCÍ

- Funkce  $f$  se nazývá **rostoucí**, právě tehdy když pro všechna  $x_1, x_2 \in D_f$  platí: Je-li  $x_1 < x_2$ , pak  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- Funkce  $f$  se nazývá **rostoucí v intervalu  $J$**  ( $J \subset D_f$ ), právě tehdy když pro všechna  $x_1, x_2 \in J$  platí: Je-li  $x_1 < x_2$ , pak  $f(x_1) < f(x_2)$ .

# FUNKCE KLESAJÍCÍ

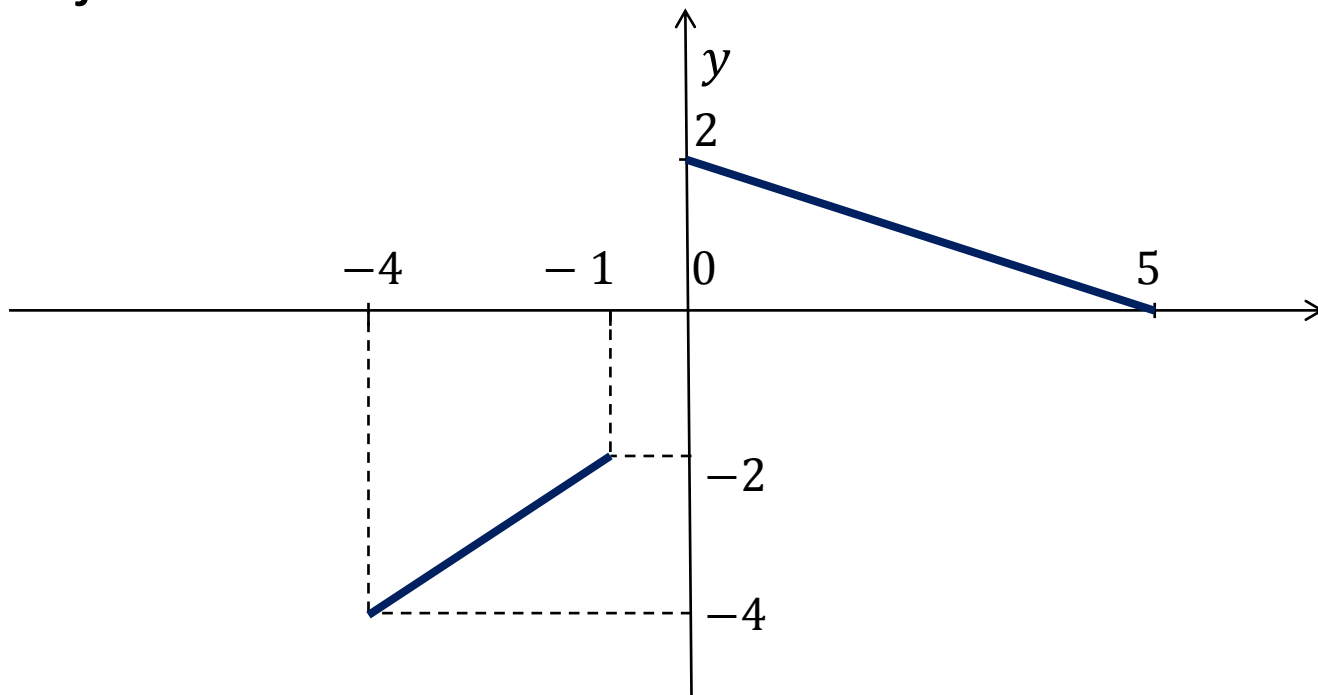
- Funkce  $f$  se nazývá **klesající**, právě tehdy když pro všechna  $x_1, x_2 \in D_f$  platí: Je-li  $x_1 < x_2$ , pak  $f(x_1) > f(x_2)$ .
- Funkce  $f$  se nazývá **klesající v intervalu  $J$**  ( $J \subset D_f$ ), právě tehdy když pro všechna  $x_1, x_2 \in J$  platí: Je-li  $x_1 < x_2$ , pak  $f(x_1) > f(x_2)$ .

# FUNKCE PROSTÁ

- Funkce  $f$  se nazývá prostá, právě tehdy když pro všechna  $x_1, x_2 \in D_f$  platí: Je-li  $x_1 \neq x_2$ , potom  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .
- Platí věty:
  - Je-li funkce rostoucí, pak je prostá.
  - Je-li funkce klesající, pak je prostá.
- Neplatí ale věty obrácené.
  - Je-li funkce prostá, pak nemusí být rostoucí nebo klesající. (Viz nákres).

# NÁKRES

Funkce na obrázku je prostá, ale nikoli rostoucí nebo klesající.

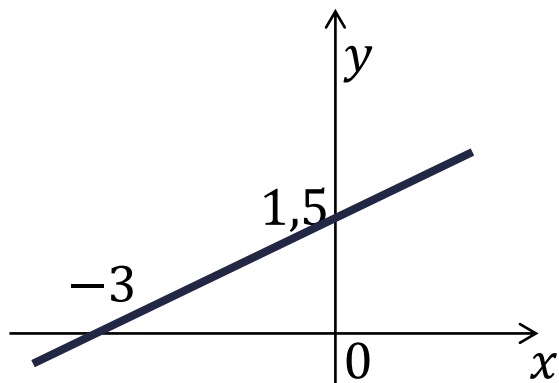


# FUNKCE NEKLESAJÍCÍ A NEROSTOUCÍ

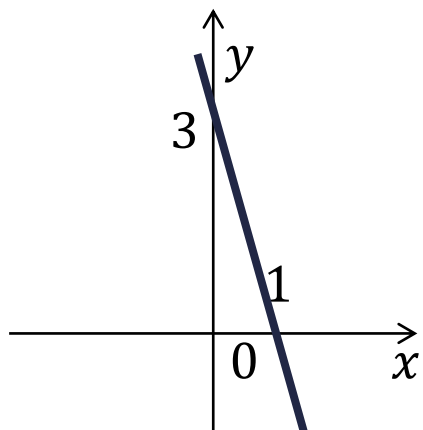
- Funkce  $f$  se nazývá **neklesající**, právě tehdy když pro všechna  $x_1, x_2 \in D_f$  platí: Je-li  $x_1 \leq x_2$ , pak  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .
- Funkce  $f$  se nazývá **nerostoucí**, právě tehdy když pro všechna  $x_1, x_2 \in D_f$  platí:  
Je-li  $x_1 \leq x_2$ , pak  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .
- Poznámka: Funkce rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající se nazývají **monotónní**.

# PŘÍKLAD

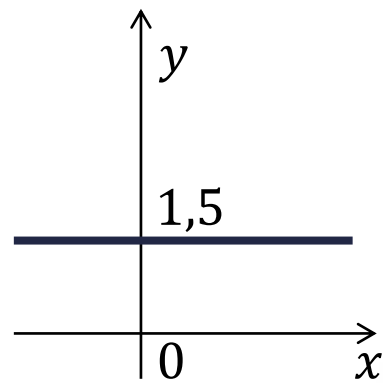
Rozhodněte, které vlastnosti má lineární a konstantní funkce? Využijte grafy těchto funkcí.



$$f_1: y = 0,5x + 1,5$$
$$a > 0$$



$$f_2: y = -3x + 3$$
$$a < 0$$



$$f_3: y = 1,5$$
$$a = 0$$



# ŘEŠENÍ - ZÁVĚRY

Lineární funkce  $y = ax + b$

a) je rostoucí pro  $a > 0$

b) je klesající pro  $a < 0$

Konstantní funkce **není prostá**.

Koeficient  $a$  lineární funkce se nazývá **směrnice** přímky  $y = ax + b$ .

Hodnotu směrnice přímky lze určit ze vztahu:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ kde } x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2.$$

# SUDÁ FUNKCE

Funkce se nazývá sudá, právě tehdy když jsou současně splněny podmínky:

1) Je-li  $x \in D_f$ , pak také  $-x \in D_f$ .

2) Pro každé  $x \in D_f$ :  $f(-x) = f(x)$ .

Z definice plyne: Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy  $y$ .

Příklady sudých funkcí:  $y = |ax| + b$ ,  $y = \cos x$ ,  
 $y = ax^2 + b$ , ...

# LICHÁ FUNKCE

Funkce se nazývá lichá, právě tehdy když jsou současně splněny podmínky:

- 1) Je-li  $x \in D_f$ , pak také  $-x \in D_f$ .
- 2) Pro každé  $x \in D_f$ :  $f(-x) = -f(x)$ .

Z definice plyne: Graf liché funkce je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

Příklady lichých funkcí:  $y = ax$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = ax^3$ , ...

K zamyšlení: Existuje funkce současně sudá i lichá?

# FUNKCE OMEZENÁ

- Funkce se nazývá **omezená zdola**, právě tehdy když existuje číslo  $d$  takové, že pro všechna  $x \in D_f$  je  $f(x) \geq d$ .
- Funkce se nazývá **omezená shora**, právě tehdy když existuje číslo  $h$  takové, že pro všechna  $x \in D_f$  je  $f(x) \leq h$ .
- Funkce se nazývá **omezená**, právě tehdy je-li zároveň omezená zdola i omezená shora.

# MAXIMUM A MINIMUM FUNKCE

- Říkáme: funkce  $f$  **má v bodě  $a$  maximum**, právě tehdy když pro všechna  $x \in D_f$  je  $f(x) \leq f(a)$ .
- Říkáme: funkce  $f$  **má v bodě  $b$  minimum**, právě tehdy když pro všechna  $x \in D_f$  je  $f(x) \geq f(b)$ .
- Rozhodněte, zda platí věta: Je-li funkce omezená, má minimum i maximum.  
(Návod: zvolte omezenou funkci, jejíž definiční obor je otevřený interval).

# PŘÍKLAD

Jsou dány funkce:  $f_1: y = -2x + 1$

$$f_2: y = -|x| + 3$$

Určete jejich vlastnosti.

# ŘEŠENÍ:

Funkce  $f_1$ : je klesající

prostá

není sudá ani lichá

není omezená shora ani zdola

nemá maximum ani minimum.

Funkce  $f_2$ : je rostoucí v  $(-\infty, 0)$ , klesající v  $(0, +\infty)$

není prostá

je sudá

je omezená shora

v bodě 0 má maximum, minimum nemá.

# POUŽITÁ LITERATURA

- ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Funkce*. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-164-7.
- Obrázky: vlastní tvorba.