

Projekt: Digitální učební materiály ve škole, registrační číslo projektu CZ.1.07/1.5.00/34.0527

Příjemce: Střední zdravotnická škola a Vyšší odborná škola zdravotnická, Husova 3, 371 60 České Budějovice

Název materiálu: Kvadratické funkce II

Autor materiálu: Mgr. Jana Lvová

Datum vytvoření: 17. 1. 2014

Zařazení materiálu:

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (III/2)

Předmět: Matematika,1., 2. ročník

Sada: MA2

Číslo DUM: 07

Tematická oblast: Funkce, rovnice a nerovnice, slovní úlohy

Ověření materiálu ve výuce:

Datum ověření: 28. 1. 2014

Ověřující učitel: Mgr. Jana Lvová

Třída: ZLY 2.

Popis způsobu použití materiálu ve výuce: Elektronická prezentace svou formou i obsahem přímo navazuje na prezentaci Kvadratické funkce I. Je určena především jako pomůcka pro učitele při výkladu nové látky. Může však posloužit i žákům k procvičení a upevnění učiva o kvadratické funkci ve všech oborech vzdělání na střední zdravotnické škole. Také je vhodná pro domácí přípravu žáků. Je využitelná rovněž jako součást e-learningu.

Tento výukový materiál je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KVADRATICKÉ FUNKCE II

GRAF FUNKCE: $y = a(x - m)^2, m \in R$

Výraz $(x - m)^2$ je vždy nezáporný \rightarrow graf funkce $y = a(x - m)^2$ se dotýká osy x pouze v případě, že $x = m$. \rightarrow Vrchol paraboly $V = [m, 0]$. Pro $x \neq m$ leží celý graf nad osou x .

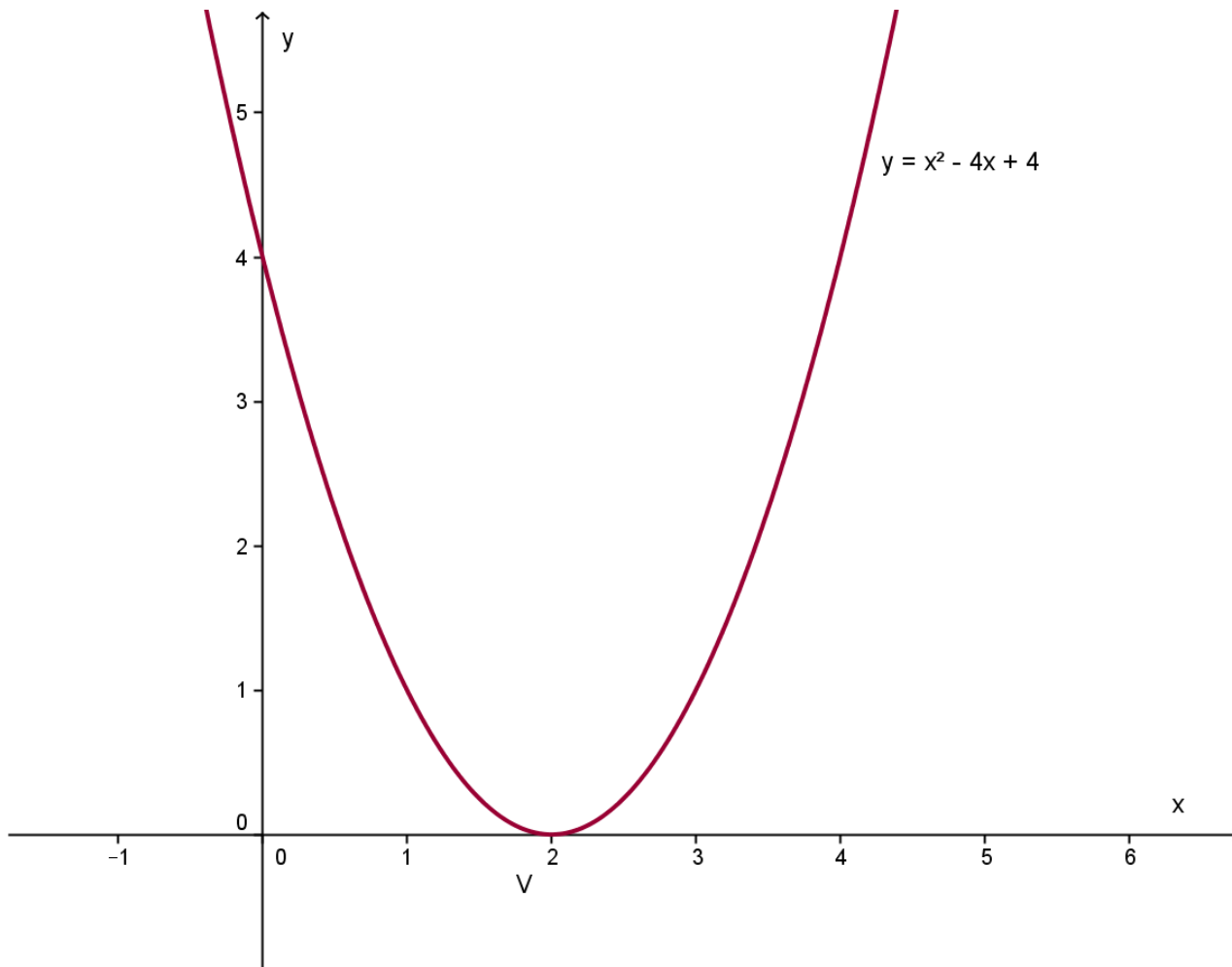
Příklad 4:

Sestrojte graf funkce: $f: y = (x - 2)^2$

Postup řešení:

1. Sestrojíme graf funkce $f': y = x^2$.
2. Osu y posuneme o 2 jednotky ve směru záporné poloosy x .

Graf funkcje: $f: y = (x - 2)^2$



GRAF FUNKCE: $y = ax^2 + bx + c$

Graf funkce $y = ax^2 + bx + c$ dostaneme tak, že kvadratický trojčlen doplníme na druhou mocninu dvojčlenu.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = \\ &= a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + c - a \left(\frac{b}{2a} \right)^2 = \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a(x - m)^2 + n. \\ m &= -\frac{b}{2a}, \quad n = c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Grafem kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ je parabola s osou rovnoběžnou s osou y a s vrcholem V .

$$V = [m, n] = \left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right]$$

Opět platí:

Je-li $a > 0$, je vrchol V jejím minimem.

Parabola se „otvírá“ vzhůru.

Je-li $a < 0$, je vrchol V jejím maximem.

Parabola se „otvírá“ dolů.

GRAF FUNKCE: $y = ax^2 + bx + c$

Příklad 5:

Sestrojte graf funkce: $f: y = x^2 + 2x - 3$

Postup řešení:

1. Sestrojíme graf funkce: $y = x^2$
2. Výraz $x^2 + 2x - 3$ doplníme na druhou mocninu dvojčlenu.
$$x^2 + 2x + 1 - 4 = (x + 1)^2 - 4.$$
3. Vrchol paraboly $V = [-1, -4]$.
4. Počátek soustavy souřadnic posuneme do bodu $O = [1, 4]$.
Jinak řečeno osu x posuneme o 4 jednotky
v kladném směru poloosy y , osu y posuneme o 1 jednotku
v kladném směru poloosy x .

JINÝ ZPŮSOB ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 5

1. Výraz $x^2 + 2x - 3$ doplníme na druhou mocninu dvojčlenu.

$$x^2 + 2x + 1 - 4 = (x + 1)^2 - 4.$$

2. Určíme souřadnice vrcholu V paraboly:

$$V = [-1, -4].$$

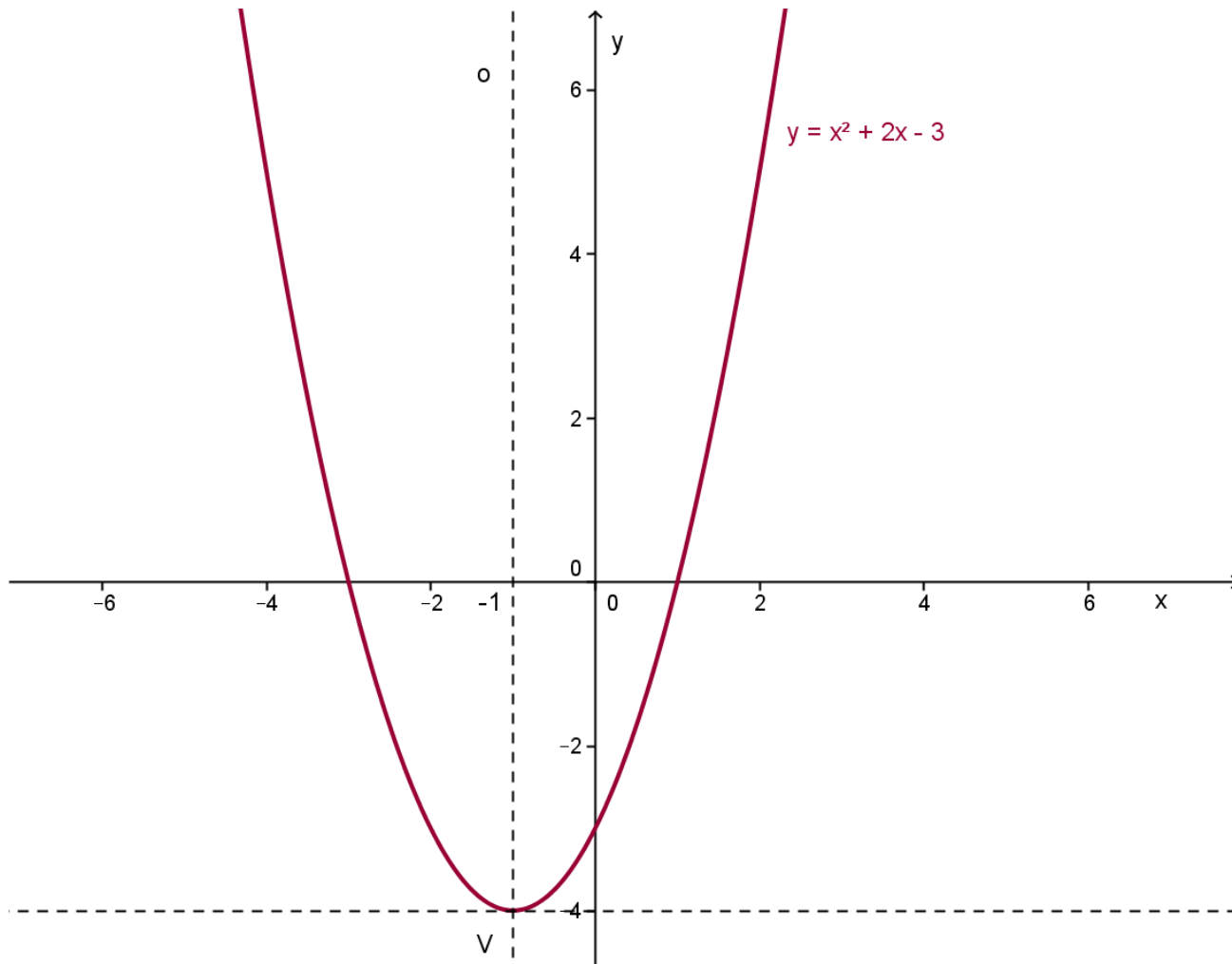
3. Sestrojíme soustavu souřadnic a bod $V = [-1, -4]$.

4. Bodem V vedeme „pomocnou soustavu souřadnic“ a v ní sestrojíme graf funkce $y = x^2$.

Poznámka: souřadnice vrcholu V paraboly můžeme

rovněž určit ze vztahu: $V = \left[m = -\frac{b}{2a}, n = c - \frac{b^2}{4a} \right]$.

GRAF FUNKCE: $y = x^2 + 2x - 3$



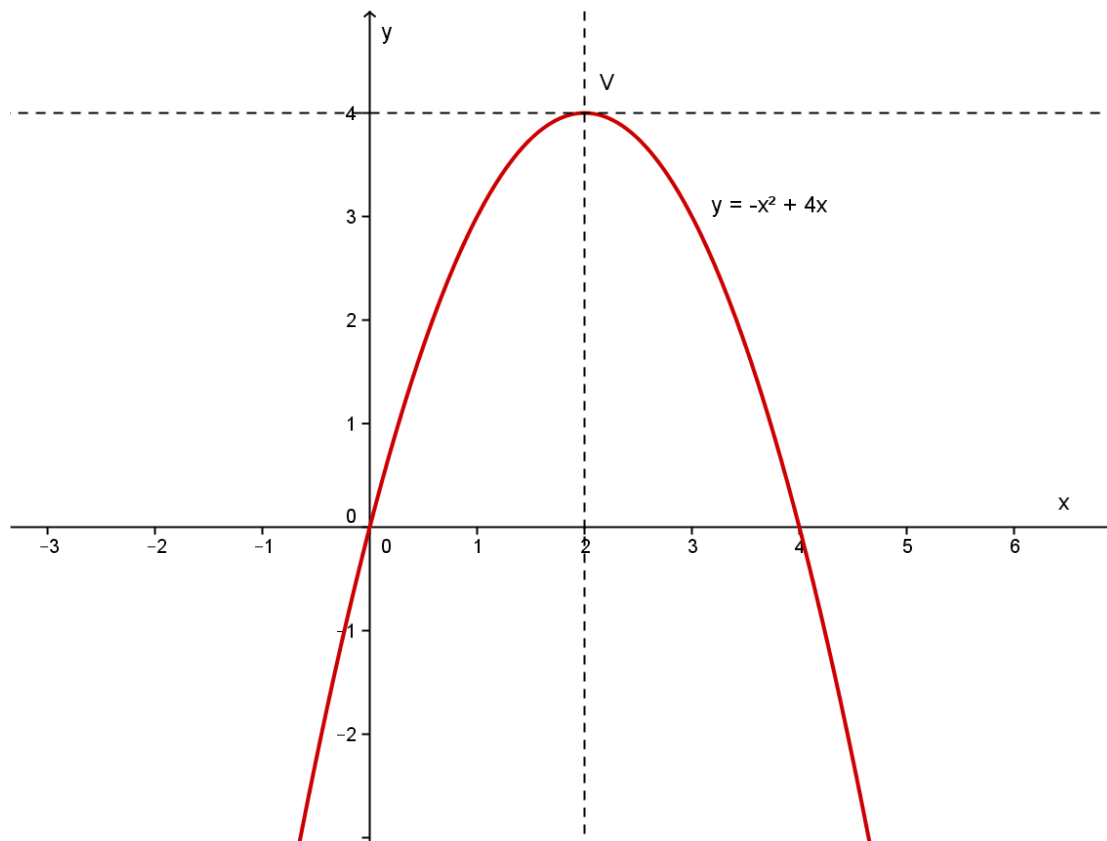
Příklad 5:

Sestrojte graf funkce: $f: y = -x^2 + 4x$.

Postup řešení:

1. Určíme souřadnice vrcholu paraboly $V = [2,4]$.
2. Sestrojíme graf funkce $y = -x^2$, jejíž vrchol leží v bodě V .

GRAF FUNKCE: $y = -x^2 + 4x$



PRŮSEČÍKY GRAFU FUNKCE S OSAMI

1. Každý graf kvadratické funkce $f: y = ax^2 + bx + c$ má s osou y **právě jeden průsečík** $Y = [0, c]$.
2. Každý graf kvadratické funkce má s osou x nejvýše 2 průsečíky. Jejich počet závisí na počtu kořenů kvadratické rovnice: $ax^2 + bx + c = 0$.

Souřadnice průsečíků grafu kvadratické funkce

s osou x jsou: $X_{1,2} = \left[\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right]$.

Příklad 6:

- a) Sestrojte graf funkce: $f: y = -0,5x^2 + x + 4$.
- b) Určete průsečíky grafu funkce f s osami x a y .

Řešení:

Vrchol paraboly: $V = \left[1, \frac{9}{2}\right]$.

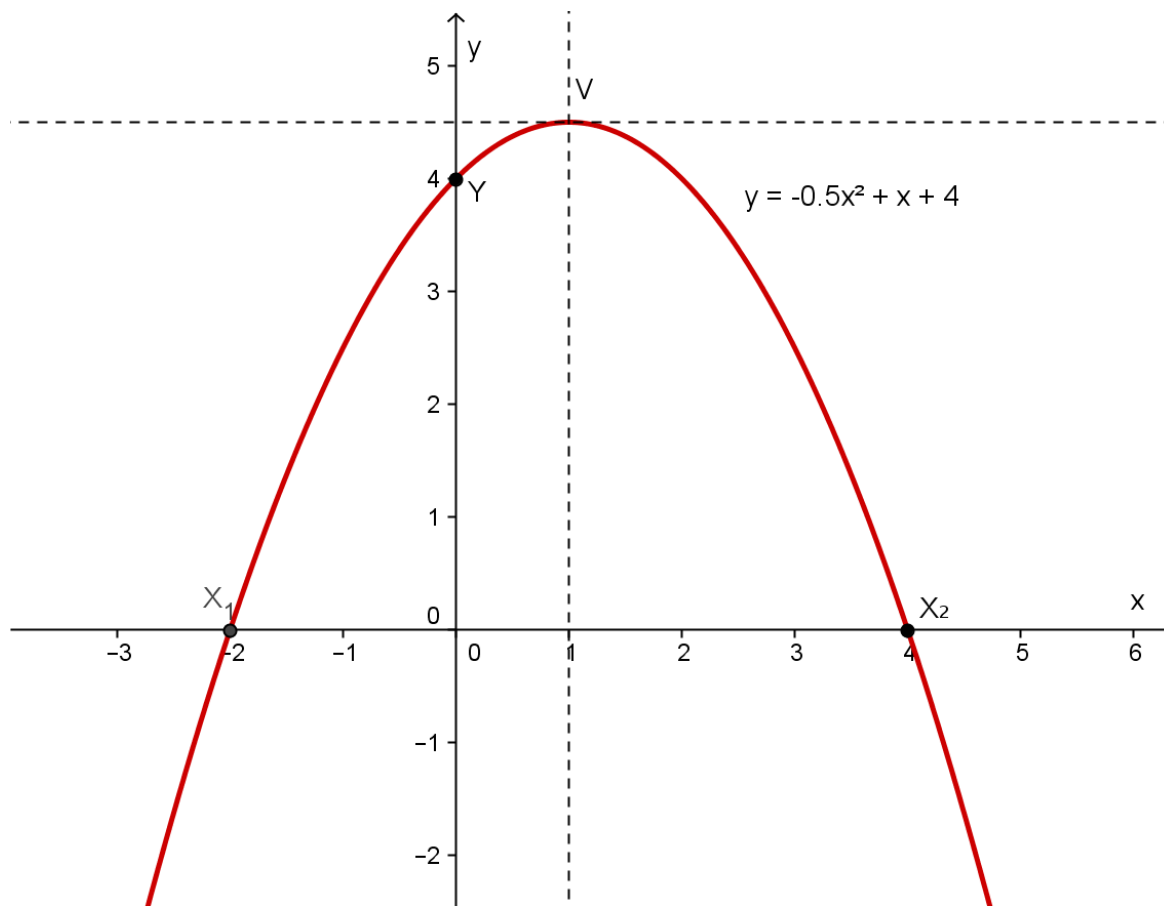
Průsečík grafu funkce s osou y : $Y = [0, 4]$

Průsečíky grafu funkce s osou x :

$$X_1 = \left[\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right] = \left[\frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-1}, 0 \right] = [-2, 0]$$

$$X_2 = \left[\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right] = \left[\frac{-1 - \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-1}, 0 \right] = [4, 0]$$

Graf funkcje $f: y = -0,5x^2 + x + 4$.



POUŽITÁ LITERATURA

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Funkce*. 3. upravené vydání. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-164-7.

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU: 1. díl*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-020-1.

Obrázky: vlastní tvorba (vytvořeny v programu Geogebra).