INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Projekt: Digitální učební materiály ve škole, registrační číslo projektu CZ.1.07/1.5.00/34.0527

Příjemce: Střední zdravotnická škola a Vyšší odborná škola zdravotnická, Husova 3, 371 60 České Budějovice

---

Název materiálu: **Kvadratické rovnice (pracovní list)**

Autor materiálu: **Mgr. Jana Lvová**

Datum (období) vytvoření: **11. 1. 2014**

Zařazení materiálu:

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (III/2)

Tematická oblast: Funkce, rovnice a nerovnice, slovní úlohy

Sada: MA2 Číslo DUM: 15 Předmět, ročník: Matematika, 1., 2.

Ověření materiálu ve výuce:

Datum ověření: 17., 21. 1. 2014 Třída: ZLY 2. Ověřující učitel: Mgr. Jana Lvová

Popis způsobu použití materiálu ve výuce:

Pracovní list, který je primárně určen učiteli jako pomůcka při výkladu, dále může sloužit žákům pro individuální procvičení látky. Možné je i jeho využití učitelem k ověření znalostí a dovedností žáků v daném tématu. Materiál obsahuje teoretický základ a početní úlohy. Jeho součástí je i klíč správných řešení.

Tento výukový materiál je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

KVADRATICKÉ ROVNICE

Rovnice $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$,

kde $a, b, c \in R, a \neq 0$, se nazývá kvadratická rovnice (s neznámou x). Výraz $\boldsymbol{ax^2}$ je její kvadratický člen, $\boldsymbol{bx}$ je lineární člen a $\boldsymbol{c}$ je absolutní člen.

$\boldsymbol{a}$ je koeficient kvadratického členu,

$\boldsymbol{b}$ je koeficient lineárního členu**.**

Kvadratické se nazývají i rovnice, které lze do tvaru

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ převést.

Výraz $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, kde $a, b, c \in R, a \neq 0$, se **n**azývá kvadratický trojčlen.

<u>NEÚPLNÉ KVADRATICKÉ ROVNICE</u>

1. **Kvadratická rovnice bez absolutního tvaru**
   $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$
   Rovnici řešíme převedením do součinového tvaru.
   $$ax\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0$$
   Kořeny tohoto typu rovnice jsou čísla:
   $$\boldsymbol{x_1 = 0,\ \ x_2 = -\frac{b}{a}.}$$

Příklad 1

Řešte rovnici:

$$3x^2 = 6x$$

$3x(x-2) = 0$

$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$

$\boldsymbol{K = \{0, 2\}}$

2. **Kvadratické rovnice bez lineárního členu (tzv. rovnice ryze kvadratické)**

   $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$

   Rovnici řešíme převedením do tvaru:

   $x^2 = -\dfrac{c}{a}$

   $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

   Rovnice má dvě řešení pouze v případě, že výraz $\boldsymbol{-\frac{c}{a} \geq 0}$.

   To znamená, že čísla $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{c}$ mají různá znaménka. Pokud mají stejná znaménka, rovnice nemá řešení.

Příklad 2

Řešte rovnice:

a) $8x^2 + 4 = 3$

$$8x^2 = -1$$

Rovnice nemá řešení.

$\boldsymbol{K} = \emptyset$

b) $4x^2 - 64 = 0$

$$4x^2 = 64$$

$$x^2 = 16$$

$$x_{1,2} = \pm 4$$

$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{-4}, \boldsymbol{4}\}$

Další příklady k procvičení

a) $-16 - 7x^2 = 7$

$[\emptyset]$

b) $1{,}8x^2 - 2 = 3$

$[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}]$

c) $-4x^2 - 4x = 0$

$[0, -1]$

d) $0{,}04x^2 + 4{,}04x = 0$

$[0, -101]$

ÚPLNÉ KVADRATICKÉ ROVNICE

Postup řešení kvadratické rovnice

1. Užitím ekvivalentních úprav rovnici převedeme do tvaru: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$.
2. Vypočteme **diskriminant D:**

   $$\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$$

   Mohou nastat tři možnosti:

   a) $D < 0 \ \rightarrow$ rovnice nemá v množině R žádný kořen.
   b) $D = 0 \ \rightarrow$ rovnice má v množině R právě jeden (dvojnásobný) kořen.
   c) $D > 0 \ \rightarrow$ rovnice má v množině R dva různé kořeny.

3. Vypočteme kořeny rovnice (pokud existují).

   $$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

4. Provedeme zkoušku a zapíšeme množinu řešení rovnice.

Příklad 3

V R řešte:

$3x^2 - 7x + 7 = 0$

$D = \ b^2 - 4ac$

$D = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 7$

$D = -35 \quad \rightarrow \quad D < 0 \ \rightarrow \ \boldsymbol{K} = \emptyset$

Příklad 4

V R řešte:

$4x + x^2 = 12$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)$$
$$D = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 8}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-4 - 8}{2} = -6$$

$\boldsymbol{x_1 = 2,} \qquad \boldsymbol{x_2 = -6}$

Zkouška:

Pro $x_1 = 2$: $\quad L = 4 \cdot 2 + 2^2 = 12$

$P = 12 \qquad L = P$

Pro $x_2 = 6$: $\quad L = 4 \cdot (-6) + (-6)^2 = 12$

$P = 12 \qquad L = P$

$\boldsymbol{K = \{2, -6\}}$

Příklad 5

V R řešte:

$(2x+3)^2 - x^2 = 2x^2 - 27$

$4x^2 + 12x + 9 - x^2 - 2x^2 + 27 = 0$

$\mathbf{x^2 + 12x + 36 = 0}$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0$

$x = \frac{-b}{2a}$

$x = \frac{-12}{2}$

$\underline{\underline{\mathbf{x = -6}}}$

Zkouška:

$L = (2 \cdot (-6) + 3)^2 - (-6)^2 = 81 - 36 = 45$

$P = 2(-6)^2 - 27 = 72 - 27 = 45$

$L = P$

$\boldsymbol{K} = \{\mathbf{-6}\}$

Příklad 6

V R řešte:

$$\frac{3x}{x-2}+\frac{1}{x+3}=1$$

Řešíme pro $x \neq 2, \ \ x \neq -3$

$$3x(x+3)+x-2=(x-2)(x+3)$$

$$2x^2+9x+4=0$$

$$D=9^2-4\cdot 2\cdot 4=49$$

$$x_{12}=\frac{-9\pm\sqrt{49}}{4}$$

$$\boldsymbol{x_1=-\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{x_2=-4}$$

$$\boldsymbol{K=\left\{-\frac{1}{2},-4\right\}}$$

Další příklady k procvičení

a) $\frac{(x+3)^2}{5} - \frac{x(2x-3)}{2} = \frac{(3x-1)^2}{5} - 1$

$[-\frac{1}{2}, 2]$

b) $(3x-5)(2x+3) = -14$

$[\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$

c) $(5x-2)^2 - 7(5x-2) = 8$

$[2, \frac{1}{5}]$

d) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{x^2}{9} - 3$

$[12, -\frac{9}{4}]$

e) $\frac{x(x-7)}{3} - 1 = \frac{11x}{10} - \frac{x+4}{3}$

$[\{10, -0{,}7\}]$

f) $3\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{9}\right) = 0$

$[\left\{\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right\}]$

g) $\frac{4x+5}{x} - \frac{12}{x-2} = 1,$

$[\left\{5, -\frac{2}{3}]\right\}$

Použitá literatura:

CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice*. Dotisk 3. vydání. Praha: Prometheus, 2004. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-154-X.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Maturitní minimum*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-030-6.