INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Digitální učební materiál

Projekt: Digitální učební materiály ve škole, registrační číslo projektu CZ.1.07/1.5.00/34.0527

Příjemce: Střední zdravotnická škola a Vyšší odborná škola zdravotnická, Husova 3, 371 60 České Budějovice

---

Název materiálu: **Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratických rovnic (pracovní list)**

Autor materiálu: **Mgr. Jana Lvová**

Datum (období) vytvoření: **14. 1. 2014**

Zařazení materiálu:

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (III/2)

Tematická oblast: Funkce, rovnice a nerovnice, slovní úlohy

Sada: MA2 Číslo DUM: 16 Předmět, ročník: Matematika, 1., 2.

Ověření materiálu ve výuce:

Datum ověření: 24. 1. 2014 Třída: ZLY 2. Ověřující učitel: Mgr. Jana Lvová

Popis způsobu použití materiálu ve výuce:

Pracovní list, který je primárně určen učiteli jako pomůcka při výkladu, dále může sloužit žákům pro individuální procvičení látky. Možné je i jeho využití učitelem k ověření znalostí a dovedností žáků v daném tématu. Materiál obsahuje teoretický základ a početní úlohy. Jeho součástí je i klíč správných řešení.

Tento výukový materiál je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

VZTAHY MEZI KOŘENY A KOEFICIENTY KVADRATICKÝCH ROVNIC

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R, a \neq 0$ s nezáporným diskriminantem $D = b^2 - 4ac$ má kořeny $x_{1,}x_2$: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D} + \left(-b - \sqrt{D}\right)}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-b + \sqrt{D}\right) \cdot \left(-b - \sqrt{D}\right)}{2a \cdot 2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$$

Pro kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ s kořeny $x_{1,}x_2$ platí:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Pro normovaný tvar kvadratické rovnice $(a = 1)$ platí:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -b}$$

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c}$$

Zapíšeme-li normovanou kvadratickou rovnici ve tvaru:

$x^2 + px + q = 0$, platí: $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p}$

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = q}$$

Tyto vztahy se nazývají **Viètovy vzorce.**

Platí i obrácená věta:

Platí-li v normované kvadratické rovnici $x^2 + px + q = 0$:
$x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$**,** jsou čísla $x_{1,} x_2$ její kořeny, protože $x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = (x - x_1)(x - x_2)$.

Rovněž platí věta:

Má-li kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in R$,

$a \neq 0$ kořeny $x_{1,} x_2$, potom pro každé $x \in R$ platí:

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$**.**

Platí i věta obrácená:

Je-li možné kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ rozložit na součin $a(x - x_1)(x - x_2)$, jsou čísla $x_{1,} x_2$ kořeny rovnice

$ax^2 + bx + c = 0$.

Příklad 1:

Užitím Viètových vzorců řešte rovnice:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Řešení: $x_1 + x_2 = 7$ a $x_1 \cdot x_2 = 12$.

Hledáme dvě čísla, jejichž vynásobením dostaneme 12 a sečtením 7. Vyhovují čísla 3 a 4.

Tedy: $\boldsymbol{x_1 = 3,\ x_2 = 4}$

$\boldsymbol{K = \{3, 4\}}$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Řešíme stejným postupem:

$x_1 + x_2 = 5$ a $x_1 \cdot x_2 = 6$

$\boldsymbol{x_1 = 3,\ x_2 = 2}$

$\boldsymbol{K = \{2, 3\}}$

c) $x^2 + x - 2 = 0$

Řešíme stejným postupem:

$x_1 + x_2 = -1$ a $x_1 \cdot x_2 = -2$

$\boldsymbol{x_1 = 1,\ x_2 = -2}$

$\boldsymbol{K = \{1, -2\}}$

Příklad 2:

Napište normovanou kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou:

a) $x_1 = 3,\ x_2 = 6$

Řešení: $x_1 + x_2 = 9$ a $x_1 \cdot x_2 = 18$

$-p = 9 \ \rightarrow\ \boldsymbol{p = -9}$

$\boldsymbol{q = 18}$

Hledaná rovnice má tvar: $\boldsymbol{x^2 - 9x + 18 = 0}$

b) $x_1 = -4,\ x_2 = -8$

Řešení: $x_1 + x_2 = -12$ a $x_1 \cdot x_2 = 32$

$-p = -12 \ \rightarrow\ \boldsymbol{p = 12}$

$\boldsymbol{q = 32}$

Hledaná rovnice má tvar: $\boldsymbol{x^2 + 12x + 32 = 0}$

Příklad 3:

Najděte všechny kvadratické rovnice, jejichž kořeny jsou čísla:

a) -2 a 7

Řešení: Najdeme nejprve normovanou kvadratickou rovnici, která vyhovuje zadaným podmínkám.

$p = -5,\ q = -14$

Hledaná normovaná rovnice má tvar: $x^2 + 12x + 32 = 0$

Stejné kořeny jako normovaná rovnice mají i všechny její

násobky: $\boldsymbol{a(x^2 + 12x + 32) = 0}, a \in R, a \neq 0$

b) 3 a $\frac{1}{2}$

$p = -3{,}5,\ \ q = \frac{3}{2}$

Hledané rovnice mají tvar: $\boldsymbol{a(x^2 - 3{,}5x + 1{,}5) = 0}$,

$a \in R, a \neq 0.$

Příklad 4:

Zjednodušte výrazy a určete, kdy mají smysl

a) $\frac{x^2-3x-4}{3x-12}$

Řešení: Určíme kořeny rovnice $x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 = 4,\ \ x_2 = -1$

Rozložíme a upravíme výrazy v čitateli i jmenovali

$$\frac{x^2-3x-4}{3x-12} = \frac{(x-4)(x+1)}{3(x-4)} = \boldsymbol{\frac{x+1}{3}} \qquad x \neq 4$$

b) $\frac{x^2-3x+2}{7(x^2-1)(x^2-5x+6)}$

Řešení: Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu:

$$\frac{x^2-3x+2}{7(x^2-1)(x^2-5x+6)} = \frac{(x-2)(x-1)}{7(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7(x+1)(x-3)}}$$

$x \neq -1, x \neq 3$

Další příklady k procvičení:

a) Užitím Viètových vzorců řešte rovnice:

$x^2 - 11x + 28 = 0$ $[x_1 = 4,\ x_2 = 7]$

$x^2 + 11x + 30 = 0$ $[x_1 = -5,\ x_2 = -6]$

b) Doplňte koeficienty kvadratické rovnice a určete její druhý kořen, jestliže platí:

$2x^2 + bx + 48 = 0$ $x_1 = 8$ $[b = -22,\ x_2 = 3]$

$x^2 - 4x + c = 0$ $x_1 = 4$ $[c = 0,\ x_2 = 0]$

c) Napište kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla:¨ -1 a 11 nebo -3 a 5.

$[x^2 - 10x - 11 = 0]$

$[x^2 - 2x - 15 = 0]$

d) Zjednodušte výraz, určete, kdy má smysl:

$$\frac{y^2-4}{y^2+5y-14}\cdot\frac{y^2-49}{2y+4}$$

$$\left[\frac{y-7}{2}\ , y \neq \pm 2,\ y \neq 7\right]$$

Použitá literatura:

CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice*. Dotisk 3. vydání. Praha: Prometheus, 2004. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-154-X.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Maturitní minimum*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-030-6.

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU: 1. díl*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-020-1.