Projekt: **Digitální učební materiály ve škole, registrační číslo projektu CZ.1.07/1.5.00/34.0527**

Příjemce: Střední zdravotnická škola a Vyšší odborná škola zdravotnická, Husova 3, 371 60 České Budějovice

Název materiálu: Vektory IV. – Skalární součin vektorů a jeho vlastnosti

Autor materiálu: RNDr. Helena Jandová Datum (období) vytvoření: únor 2013

Zařazení materiálu:

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (III/2)

Předmět: Matematika, 3. , 4. ročník

Sada: MA4

Číslo DUM: 5

Tematická oblast: Analytická geometrie

Ověření materiálu ve výuce:

Datum ověření: 25. 2. 2013

Ověřující učitel: RNDr. Helena Jandová

Třída: ZLY 4

Popis způsobu použití materiálu ve výuce: Výuka vektorů ve 3. ročnících SZŠ a 4. ročnících zdravotnického lycea. Výuková elektronická prezentace, která je určena pro seznámení žáků se skalárním součinem, jeho vlastnostmi a využitím k výpočtům. Materiál může sloužit jako pomůcka doplňující výklad učitele, ale také je vhodná pro domácí přípravu žáků (např. zpřístupněním formou e-learningu). Materiál obsahuje zpětnou vazbu ověřující pochopení látky v podobě řešených příkladů.

Tento výukový materiál je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vektory IV.

skalární součin vektorů a jeho vlastnosti

Vlastnosti skalárního součinu

Pro každé vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ (v rovině nebo v prostoru) a každé reálné číslo *c* platí:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \ ,$$

$$\left(c \cdot \vec{u}\right) \cdot \vec{v} = c \cdot \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) \ ,$$

$$\vec{w} \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} \, .$$

Důsledky a)

Pro každé vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ **platí:**

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{c}+\vec{d}\right) = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{d}$$

Příklad č. 3

Jsou dány vektory:

$$\vec{\mathbf{a}} = (0, 1), \quad \vec{\mathbf{b}} = (3, -2)$$

$$\vec{\mathbf{c}} = (4, 1), \quad \vec{\mathbf{d}} = (-1, 2)$$

Ověřte, že pro ně platí rovnost:

$$(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) \cdot (\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{d}}) = \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{d}} + \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{d}}$$

Řešení č. 3

Vypočteme souřadnice:

$$\vec{a} + \vec{b} = (3, 1) \qquad \vec{c} + \vec{d} = (3, 3)$$

Skalární součin na levé straně rovnice:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = 9 - 3 = 6$$

Pravá strana rovnice:

$$\vec{a}\vec{c} + \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{c} + \vec{b}\vec{d} = 1 + 2 - 7 + 10 = 6$$

Rovnost platí: L = P

Důsledky b)

Pro každé vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ platí:

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2 ,$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2 .$$

Důsledky c)

Položíme-li $\boxed{|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2}$

Můžeme skalární součin z rovnice

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$$

vyjádřit:

$$\boxed{\vec{u}\vec{v} = \frac{1}{2}\left(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2\right)}$$

Příklad č. 1

Vypočítejte skalární součin vektorů

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Znáte-li velikosti obou vektorů

$$\left|\vec{u}\right| = 2\,, \quad \left|\vec{v}\right| = 5$$

a souřadnice vektoru $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \left(2\,,\,1\right)$$

Postup řešení č. 1

Použijeme vzorec:

$$\vec{u}\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - \left|\vec{u} - \vec{v}\right|^2\right)$$

Vypočítáme velikost vektoru $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ **:**

$$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$$

Do vzorce dosadíme $\vec{u}\vec{v} = \frac{1}{2}\left(2^2 + 5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2\right)$

Výsledek č. 1

Skalární součin:

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(4 + 25 - 5\right)$$

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\cdot 24$$

$$\vec{u}\,\vec{v} = 12$$

Skalární součin vektorů $\vec{u}\,\vec{v} = 12$ **.**

Příklad č. 2

Jsou dány vektory

$$\vec{\mathbf{u}} = \left(\mathbf{2}, -\mathbf{1}\right), \quad \vec{\mathbf{v}} = \left(\mathbf{1}, -\mathbf{3}\right)$$

Určete vektor $\vec{\mathrm{w}}$, pro který je:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \mathbf{7}, \quad \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \mathbf{6}$$

Řešení č. 2

Hledaný vektor označíme $\vec{w} = \left(w_1 , w_2 \right)$

Musí splňovat rovnice:

$$\begin{aligned} 2w_1 - w_2 &= 7 \\ w_1 - 3w_2 &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} w_1 &= 3 \\ w_2 &= -1 \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic dostaneme souřadnice vektoru $\vec{w} = \left(3 , -1 \right)$

Příklad č. 3

Najděte vektor $\vec{v}$, který je rovnoběžný s vektorem $\vec{u} = (4, -3)$ a má tu vlastnost, že skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = 50$.

Řešení č. 3 (postup)

Pro vektory platí: $\vec{v} \parallel \vec{u}$, $\vec{u} = (4, -3)$

$\vec{v}$ **musí být k-násobkem vektoru** $\vec{u}$ **:**

$\vec{v} = k \cdot \vec{u} = (4k, -3k)$,

Ze zadání: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 50$

Po dosazení: $\vec{u} \cdot k \cdot \vec{u} = 50$

$$k \cdot \vec{u}^2 = 50 \qquad (\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2)$$

Řešení č. 3 (výpočet a odpověď)

Řešíme rovnici:

k·(16 + 9) = 50

25·k = 50

<u>k = 2</u>

pro $\underline{k = 2}$

$\vec{v} = (4k, -3k)$

$\vec{v} = (8, -6)$

Hledaný vektor $\vec{v} = (8, -6)$.

Seznam použité literatury

KOČANDRDLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Analytická geometrie*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-390-5

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 4.díl*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2007. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-139-0

Obrázky – zdroj: vlastní tvorba