Projekt: **Digitální učební materiály ve škole, registrační číslo projektu CZ.1.07/1.5.00/34.0527**

Příjemce: Střední zdravotnická škola a Vyšší odborná škola zdravotnická, Husova 3, 371 60 České Budějovice

Název materiálu: Vektory V. – Úhel vektorů, jeho výpočet pomocí skalárního součinu, využití skalárního součinu

Autor materiálu: RNDr. Helena Jandová Datum (období) vytvoření: únor 2013

Zařazení materiálu:

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (III/2)

Předmět: Matematika, 3, 4. ročník

Sada: MA4

Číslo DUM: 6

Tematická oblast: Analytická geometrie

Ověření materiálu ve výuce:

Datum ověření: 27. 2. 2013

Ověřující učitel: RNDr. Helena Jandová

Třída: ZLY 4

Popis způsobu použití materiálu ve výuce: Výuka vektorů ve 3. ročnících SZŠ a 4. ročnících zdravotnického lycea. Výuková elektronická prezentace, která je určena pro seznámení žáků se skalárním součinem, jeho vlastnostmi a využitím k výpočtům např. při výpočtu úhlu vektorů. Materiál může sloužit jako pomůcka doplňující výklad učitele, ale také je vhodná pro domácí přípravu žáků (např. zpřístupněním formou e-learningu). Materiál obsahuje zpětnou vazbu ověřující pochopení látky v podobě řešených příkladů.

Tento výukový materiál je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vektory V.

úhel vektorů, jeho výpočet pomocí skalárního součinu vektorů, využití skalárního součinu

Úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ (definice)

Mají-li dva nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ umístění $\overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{OV}$ nazývá se velikost konvexního úhlu *UOV* úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$.

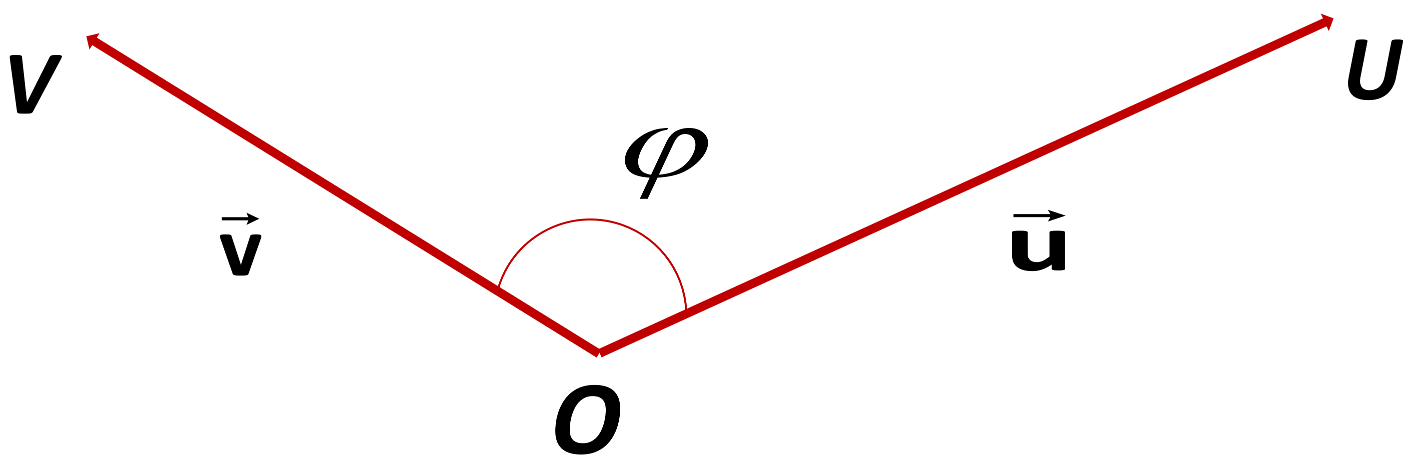
Jsou-li přímky *OU, OV* navzájem kolmé, říkáme, že i vektory $\overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{OV}$ jsou navzájem kolmé.

Úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ (graficky)

Konvexní úhel UOV, který svírají vektory $\vec{u}, \vec{v}$.

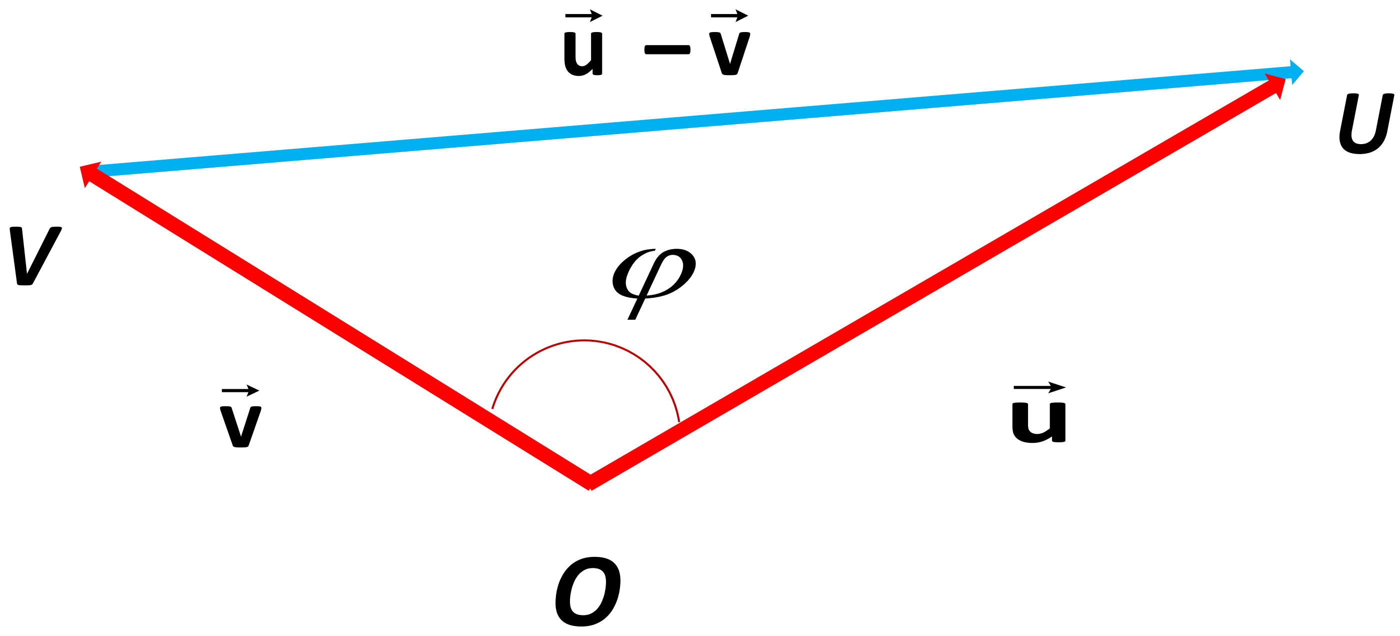
Můžeme jej označit např. φ.

Musí splňovat podmínku: $0 \leq \varphi \leq \pi$



Určení úhlu φ

Obecný trojúhelník *UOV*, ve kterém platí kosinová věta.



Vyjádření úhlu φ

Kosinovou větu

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi$$

upravíme

$$|\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u}-\vec{v}|^2\right)$$

položíme

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u}-\vec{v}|^2\right)$$

Výpočet úhlu φ

Z předcházejícího dostáváme

$$|\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}|\cos\varphi = \vec{\mathbf{u}}\,\vec{\mathbf{v}}$$

Odkud vyjádříme $$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{u}}\,\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}|}}$$

Příklad č. 1

Vypočítejte úhel φ vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, je-li

$$\vec{u} = (-1, 2)$$

$$\vec{v} = (1, 3)$$

Postup řešení č. 1

Skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 = -1 + 6 = 5$$

Velikost vektorů

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 3^3} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Výsledek č.1

Pro úhel φ platí:

$$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5\cdot 5\cdot 2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{pro} \quad \varphi = 45^0$$

Úhel vektorů je 45^0.

Význam skalárního součinu

Ze vzorce $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi = \vec{u}\vec{v}$ **vyplývá,**
že skalární součin dvou vektorů je roven nule $(\vec{u}\cdot\vec{v} = 0)$ **právě tehdy,**
když aspoň jeden z nich je nulový vektor nebo když jsou oba nenulové a navzájem kolmé.

Příklad č. 2

Jsou dány vektory

$$\vec{\mathbf{u}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{1})$$

$$\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{6})$$

Určete, zda jsou navzájem kolmé.

Řešení č. 2

Určíme skalární součin:

$$\vec{u}\,\vec{v} = 3\cdot 2 + (-1)\cdot 6 = 6 - 6 = 0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Vektory $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **jsou navzájem kolmé.**

Praktické využití

V některých úlohách je potřeba najít nenulový vektor kolmý k danému vektoru.

Využijeme větu:

Dva nenulové vektory jsou navzájem kolmé, právě tehdy, když jejich skalární součin je roven nule.

Na příklad

K vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2)$, jsou vektory

$\vec{a} = (-v_2, v_1)$, $\vec{b} = (v_2, -v_1)$ kolmé.

protože platí:

$$\vec{v}\,\vec{a} = -v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_1 = 0$$

$$\vec{v}\,\vec{b} = v_1 \cdot v_2 - v_2 \cdot v_1 = 0$$

Příklad č. 3

Určete jednotkový vektor, který je kolmý k vektoru $\vec{u} = (0, 3)$.

(pro jednotkový vektor platí: $|\vec{v}| = 1$)

Řešení č. 3

Jednotkové vektory kolmé k vektoru $\vec{u} = (0, 3)$ jsou dva:

$$\vec{v}_1 = (1, 0) \quad \text{a} \quad \vec{v}_2 = (-1, 0)$$

Platí: $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 1$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0 \qquad \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$$

Obecně:

K vektoru $\vec{v} = \left(v_1 , v_2 \right)$ **jsou kolmé všechny nenulové násobky vektoru** $\left(-v_2 , v_1 \right)$

tj. všechny vektory:

$$(-k \cdot v_2 , k \cdot v_1) , \quad k \neq 0$$

Příklad č. 4

Určete vektor, jehož velikost je 26 a který je kolmý k vektoru $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{5}, \mathbf{12})$.

Postup řešení č. 4

Vektory kolmé k vektoru $\vec{v} = (5, 12)$ jsou k-násobky vektoru (–12, 5). Hledaný vektor $\vec{u}$ musí splňovat podmínku:

$$\left|\vec{u}\right| = 26$$

Řešíme rovnici:

$$\sqrt{(-12)^2 k^2 + 5^2 k^2} = 26$$

Řešení č. 4

Kvadratická rovnice má dvě řešení:

$$144k^2 + 25k^2 = 26^2$$

$$169k^2 = (13 \cdot 2)^2$$

$$13^2 k^2 = 13^2 \cdot 4$$

$$k^2 = 4$$

$$|k| = 2$$

Výsledek a zkouška č. 4

Úloze vyhovují právě dva vektory:

Pro k = 2 je to vektor $\vec{u} = (-24, 10)$

Pro k = –2 vektor $\vec{u}' = (24, -10)$

Zkouška:

$$\vec{u}\,\vec{v} = (-24) \cdot 5 + 10 \cdot 12 = 0$$

$$\vec{u}'\,\vec{v} = 24 \cdot 5 + (-10) \cdot 12 = 0$$

Seznam použité literatury

KOČANDRDLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Analytická geometrie*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-390-5

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 4.díl*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2007. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-139-0

Obrázky – zdroj: vlastní tvorba