Projekt: **Digitální učební materiály ve škole, registrační číslo projektu CZ.1.07/1.5.00/34.0527**

Příjemce: Střední zdravotnická škola a Vyšší odborná škola zdravotnická, Husova 3, 371 60 České Budějovice

Název materiálu: Vektory VI. – Vektorový součin, jeho význam a vlastnosti

Autor materiálu: RNDr. Helena Jandová

Datum (období) vytvoření: únor 2013

Zařazení materiálu:

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (III/2)

Předmět: Matematika, 3, 4. ročník

Sada: MA4

Číslo DUM: 7

Tematická oblast: Analytická geometrie

Ověření materiálu ve výuce:

Datum ověření: 11. 2. 2013

Ověřující učitel: RNDr. Helena Jandová

Třída: ZLY 4

Popis způsobu použití materiálu ve výuce: Výuka vektorů ve 3. ročnících SZŠ a 4. ročnících zdravotnického lycea. Výuková elektronická prezentace, která je určena pro seznámení žáků s vektorovým součinem, jeho vlastnostmi a využitím k výpočtům. Materiál může sloužit jako pomůcka doplňující výklad učitele, ale také je vhodná pro domácí přípravu žáků (např. zpřístupněním formou e-learningu). Materiál obsahuje zpětnou vazbu ověřující pochopení látky v podobě řešených příkladů.

Tento výukový materiál je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vektory VI.

vektorový součin vektorů a jeho vlastnosti

Vektorový součin (definice)

Vektorový součin dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ neležících na jedné přímce, je vektor $\vec{w}$, který má tyto vlastnosti:

1. **Vektor je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}, \vec{v}$,**
2. (Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tvoří pravotočivou bázi),
3. **$|\vec{w}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin\alpha$, kde α je úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.**

Vektorový součin dvou vektorů, které leží na jedné přímce, je nulový vektor.

Značení vektorového součinu

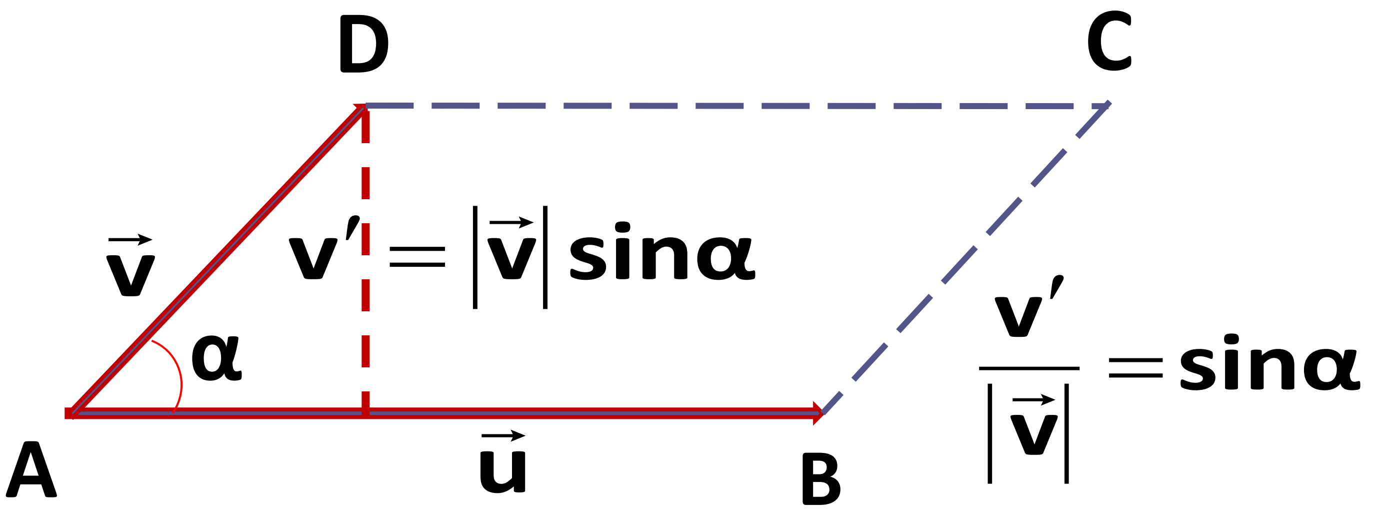
$$\boxed{\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}}$$

Čteme:

vektorový součin $\vec{w}$ vektorů $\vec{u}, \vec{v}$

Geometrický význam

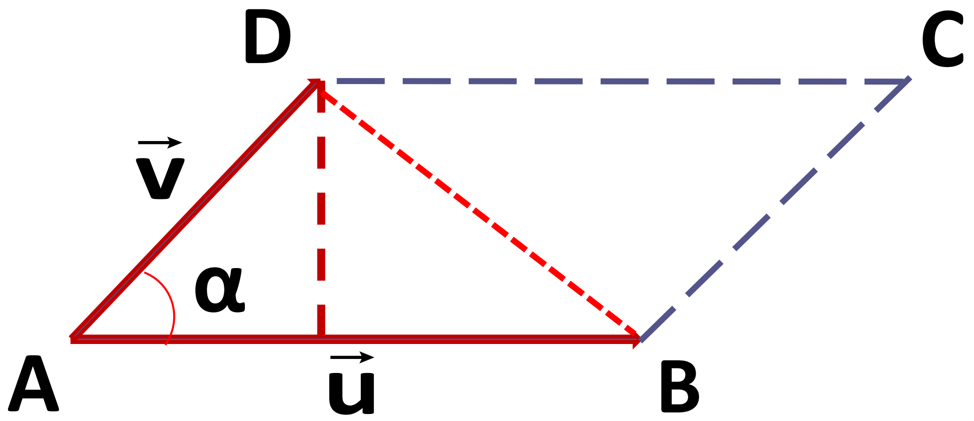
Velikost vektoru $|\vec{w}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin\alpha$ je obsah rovnoběžníku ABCD, protože $|\vec{v}| \sin\alpha$ je velikost výšky v' v tomto rovnoběžníku.



Poznámka

Chceme-li určit obsah trojúhelníku ABD použijeme vzorec:

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{w}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\alpha$$



Vlastnosti vektorového součinu

Pro každé vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

a pro každé číslo $t \in R$ platí:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

vektorový součin je distributivní

$$\vec{a} \times (t\vec{b}) = (t\vec{a}) \times \vec{b} = t(\vec{a} \times \vec{b})$$

je asociativní při násobení reálný číslem

Vlastnosti vektorového součinu

Vektorový součin <u>není komutativní</u>

platí věta:

Pro každé dva vektory $\vec{a}, \vec{b}$ je

$$\boxed{\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}}$$

Souřadnice vektorového součinu

Mají-li vektory $\vec{a}, \vec{b}$ souřadnice:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ má souřadnice:

$$\boxed{\vec{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

Příklad č. 1

Pro vektory

$$\vec{\mathbf{a}} = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -\mathbf{1})$$

$$\vec{\mathbf{b}} = (\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{5})$$

vypočítejte vektorový součin $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$

Řešení č. 1

Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ má souřadnice:

$c_1 = 3 \cdot 5 - (-1) \cdot 4 = 15 + 4 = 19$

$c_2 = (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 5 = -2 - 5 = -7$

$c_3 = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$

Hledané souřadnice jsou:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(19, -7, -2\right)$$

Příklad č. 2

Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC , jsou-li dány jeho vrcholy:

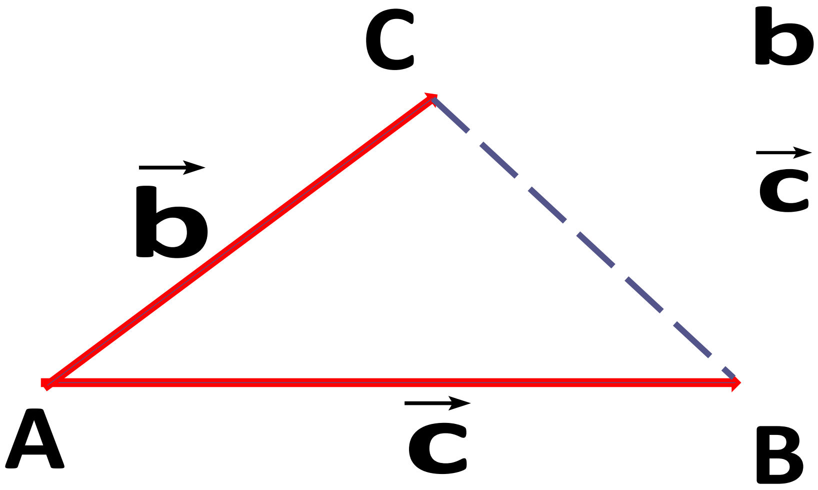
A[1, 3, 1] ,

B[4, 1, 3] ,

C[1, 4, –1].

Postup řešení č. 2

Obsah trojúhelníku je polovina velikosti vektorového součinu vektorů B – A , C – A



$$\vec{b} = C - A$$

$$\vec{c} = B - A$$

Postup řešení č. 2

Vypočteme souřadnice vektorů $\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ **:**

$$\vec{\mathbf{b}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$$

$$\vec{\mathbf{c}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{2}, \mathbf{2})$$

Obsah trojúhelníku: $\mathbf{S} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \left| \vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{b}} \right|$

Výpočet a odpověď č. 2

Vektorový součin:

$$\vec{c} \times \vec{b} = (2, 6, 3)$$

Velikost vektorového součinu:

$$\left|\vec{c} \times \vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

Obsah trojúhelníku po dosazení:

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{c} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3{,}5$$

Seznam použité literatury

KOČANDRDLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Analytická geometrie*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-390-5

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 4.díl*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2007. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-139-0

***Obrázky* – zdroj: vlastní tvorba**