Projekt: **Digitální učební materiály ve škole, registrační číslo projektu CZ.1.07/1.5.00/34.0527**

Příjemce: Střední zdravotnická škola a Vyšší odborná škola zdravotnická, Husova 3, 371 60 České Budějovice

Název materiálu: Kuželosečky – kružnice

Autor materiálu: RNDr. Helena Jandová

Datum (období) vytvoření: březen 2013

Zařazení materiálu:

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (III/2)

Předmět: Matematika, 3, 4. ročník

Sada: MA4

Číslo DUM: 15

Tematická oblast: Analytická geometrie

Ověření materiálu ve výuce:

Datum ověření: 10. 4. 2013

Ověřující učitel: RNDr. Helena Jandová

Třída: ZLY 4

Popis způsobu použití materiálu ve výuce: Výuka analytické geometrie ve 3. ročnících SZŠ a 4. ročnících zdravotnického lycea. Výuková elektronická prezentace, která je určena pro seznámení žáků s rovnicemi kružnice. Materiál může sloužit jako pomůcka doplňující výklad učitele, ale také je vhodná pro domácí přípravu žáků (např. zpřístupněním formou e-learningu). Materiál obsahuje zpětnou vazbu ověřující pochopení látky v podobě řešených příkladů.

Tento výukový materiál je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

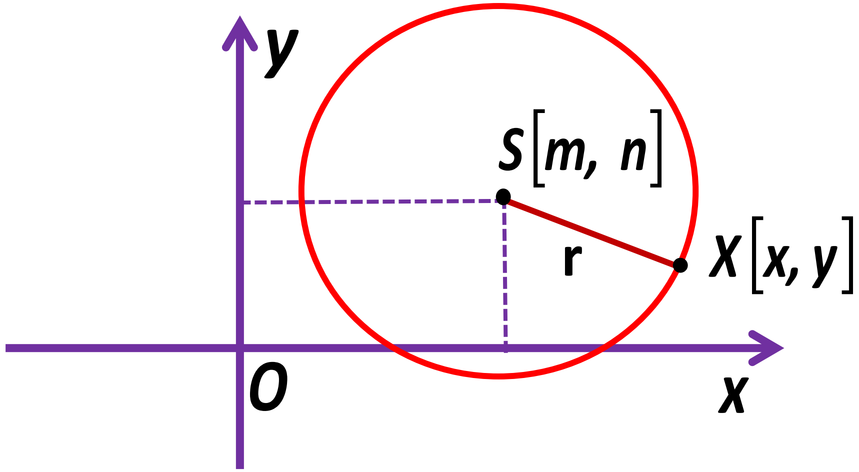
KUŽELOSEČKY

Kružnice

Rovnice kružnice

je odvozena z definice kružnice:

Množina všech bodů X roviny, které mají od daného bodu roviny (středu S kružnice) stejnou vzdálenost (poloměr r): $|XS| = r$



Středová rovnice kružnice

Střed kružnice: $S[m, n]$

Libovolný bod kružnice: $X[x, y]$

Platí: $|XS| = \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$

Po umocnění:

$$\boxed{(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2}$$

<u>**středová rovnice kružnice**</u>

Příklad č. 1

A. **Napište středovou rovnici kružnice se středem $S[3,-1]$ a poloměrem $r=\sqrt{5}$.**

B. **Určete, zda bod $A[2,1]$ leží na této kružnici.**

Řešení č. 1 A

Ze zadání: $S[3,-1], \quad r=\sqrt{5}$

Dosadíme do středové rovnice:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

Po dosazení dostaneme hledanou rovnici: $(x-3)^2+(y+1)^2=5$

Řešení č. 1 B

Zadaný bod $A[2, 1]$ leží na kružnici

$$(x-3)^2+(y+1)^2 = 5$$

pokud vyhovuje její rovnici, tj. dosadíme-li do rovnice kružnice souřadnice bodu A, dostaneme rovnost (L = P):

$$L=(2-3)^2+(1+1)^2 = (-1)^2+(2)^2=1+4=5$$

$$P=5$$

$$L=P$$

Bod A leží na této kružnici.

Obecná rovnice kružnice

Úpravou středové rovnice, dostaneme

obecnou rovnici kružnice:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0}$$

kde $p = m^2 + n^2 - r^2$

Poloměr kružnice: $r^2 = m^2 + n^2 - p$

$$r = \sqrt{m^2 + n^2 - p}$$

Příklad č. 2

Středovou rovnici kružnice z příkladu č. 1:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

převeďte na obecnou rovnici kružnice.

Řešení č. 2

Danou rovnici upravíme:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 5$$

Obecná rovnice má tvar:

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0}}$$

Poznámka č. 1

Aby rovnice $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$

byla *obecnou rovnicí kružnice* se středem *S* a poloměrem *r* , musí platit: $\underline{m^2 + n^2 - p \succ 0}$

Pokud $m^2 + n^2 - p = 0$**, platí rovnice pouze pro jediný bod a to střed kružnice** $S[m, n]$**.**

Pro $m^2 + n^2 - p \prec 0$ **nejde o rovnici kružnice.**

(výraz pod odmocninou musí být nezáporný)

Příklad č. 3

Pro které hodnoty p je rovnice

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + p = 0$$

obecnou rovnicí kružnice?

Řešení č. 3

Řešíme „doplněním na úplný čtverec“:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + p = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + p = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13 - p$$

$$13 - p = r^2 \qquad 13 - p \succ 0$$

$$r = \sqrt{13 - p} \qquad \underline{\underline{13 \succ p}}$$

Daná rovnice je kružnice pro $p \prec 13$.

Poznámka č. 2

Obecnou rovnici kružnice můžeme také vyjádřit ve tvaru:

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0$$

Tento tvar využíváme např. v úlohách, kde je kružnice zadána třemi různými body a máme napsat její obecnou rovnici.

Příklad č. 4

Napište obecnou rovnici kružnice, která prochází body:

$$A\left[0,\ 5\right] \qquad B\left[4,\ 0\right] \qquad C\left[8,\ -5\right]$$

Postup řešení č. 4

Pokud hledaná kružnice existuje, má tuto rovnici:

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0$$

Do rovnice dosadíme souřadnice bodů A, B, C ($A[0, 5]$, $B[4, 0]$, $C[8, -5]$).

Dostaneme soustavu tří rovnic pro tři neznámé M, N, L:

A : $25 + 5N + L = 0$

B : $16 + 4M + L = 0$

C : $64 + 25 + 8M - 5N + L = 0$

Řešení č. 4

Budeme-li řešit tuto soustavu rovnic, zjistíme, že nemá řešení ($K = \emptyset$).

Odpověď: Rovnice kružnice, která by procházela danými body A, B, C neexistuje.

Poznámka:

Tyto tři body neurčují kružnici, protože leží na téže přímce. (Můžeme se o tom přesvědčit)

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

KOČANDRDLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Analytická geometrie*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-390-5

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 4.díl*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2007. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-139-0

Obrázky – zdroj: vlastní tvorba