Projekt: **Digitální učební materiály ve škole, registrační číslo projektu CZ.1.07/1.5.00/34.0527**

Příjemce: Střední zdravotnická škola a Vyšší odborná škola zdravotnická, Husova 3, 371 60 České Budějovice

Název materiálu: Kuželosečky – kružnice a přímka

Autor materiálu: RNDr. Helena Jandová

Datum (období) vytvoření: březen 2013

Zařazení materiálu:

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (III/2)

Předmět: Matematika, 3, 4. ročník

Sada: MA4

Číslo DUM: 16

Tematická oblast: Analytická geometrie

Ověření materiálu ve výuce:

Datum ověření: 15. 4. 2013

Ověřující učitel: RNDr. Helena Jandová

Třída: ZLY 4

Popis způsobu použití materiálu ve výuce: Výuka analytické geometrie ve 3. ročnících SZŠ a 4. ročnících zdravotnického lycea. Výuková elektronická prezentace, která je určena pro seznámení žáků s rovnicí kružnice a vzájemnou polohou kružnice a přímky. Materiál může sloužit jako pomůcka doplňující výklad učitele, ale také je vhodná pro domácí přípravu žáků (např. zpřístupněním formou e-learningu). Materiál obsahuje zpětnou vazbu ověřující pochopení látky v podobě řešených příkladů.

Tento výukový materiál je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

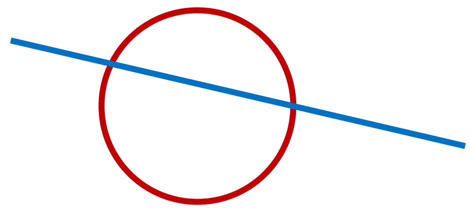
KUŽELOSEČKY

Kružnice a přímka

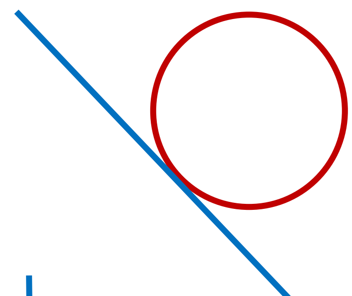
VZÁJEMNÁ POLOHA KRUŽNICE A PŘÍMKY

Z planimetrie víme, že mohou nastat tři případy:

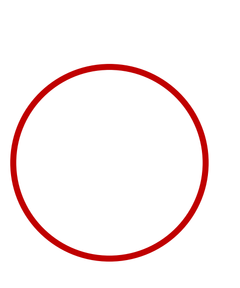
Dva společné body
(sečna)



Jeden společný bod (tečna)



Žádný společný bod
(vnější přímka)



Matematicky

Určit vzájemnou polohu přímky a kružnice znamená:

řešit soustavu dvou rovnic – lineární a kvadratické.

řešení soustavy závisí na diskriminantu,

mohou nastat tři případy:

$D > 0$ dvě řešení – dva společné body

$D = 0$ jedno řešení – jeden společný bod

$D < 0$ žádné řešení – žádný společný bod

Příklad č. 1

Určete společné body souřadnicových os a kružnice $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$.

Řešení č. 1a (průsečík s osou x)

Rovnice kružnice: $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$.

Osa x má rovnici: $y = 0$

Průsečík s osou x (v rovnici kružnice $y = 0$):

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x-8) = 0 \qquad x = 0 \text{ nebo } x = 8$$

Průsečíky s osou x jsou dva (pro oba $y = 0$):

$$P_1[0,0] \; ; \; P_2[8,0]$$

Řešení č. 1b (průsečík s osou y)

Rovnice kružnice: $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0.$

Osa y má rovnici: $x = 0$

Průsečík s osou y (v rovnici kružnice $x = 0$):

$y^2 - 6y = 0$

$x(x - 6) = 0$ $\quad y = 0$ nebo $y = 6$

Průsečíky s osou y jsou dva (pro oba $x = 0$):

$$Q_1[0, 0] ; Q_2[0, 6]$$

Příklad č. 2

Určete vzájemnou polohu kružnice a přímky:

k: $x^2 + y^2 = 25$

***p*: $x - 3y + 15 = 0$**

Řešení č. 2

Z rovnice přímky *p*: $x - 3y + 15 = 0$

Vyjádříme: $x = 3y - 15$

dosadíme do rovnice kružnice $x^2 + y^2 = 25$

$(3y - 15)^2 + y^2 = 25$

po úpravě řešíme rovnici: $y^2 - 9y + 20 = 0$

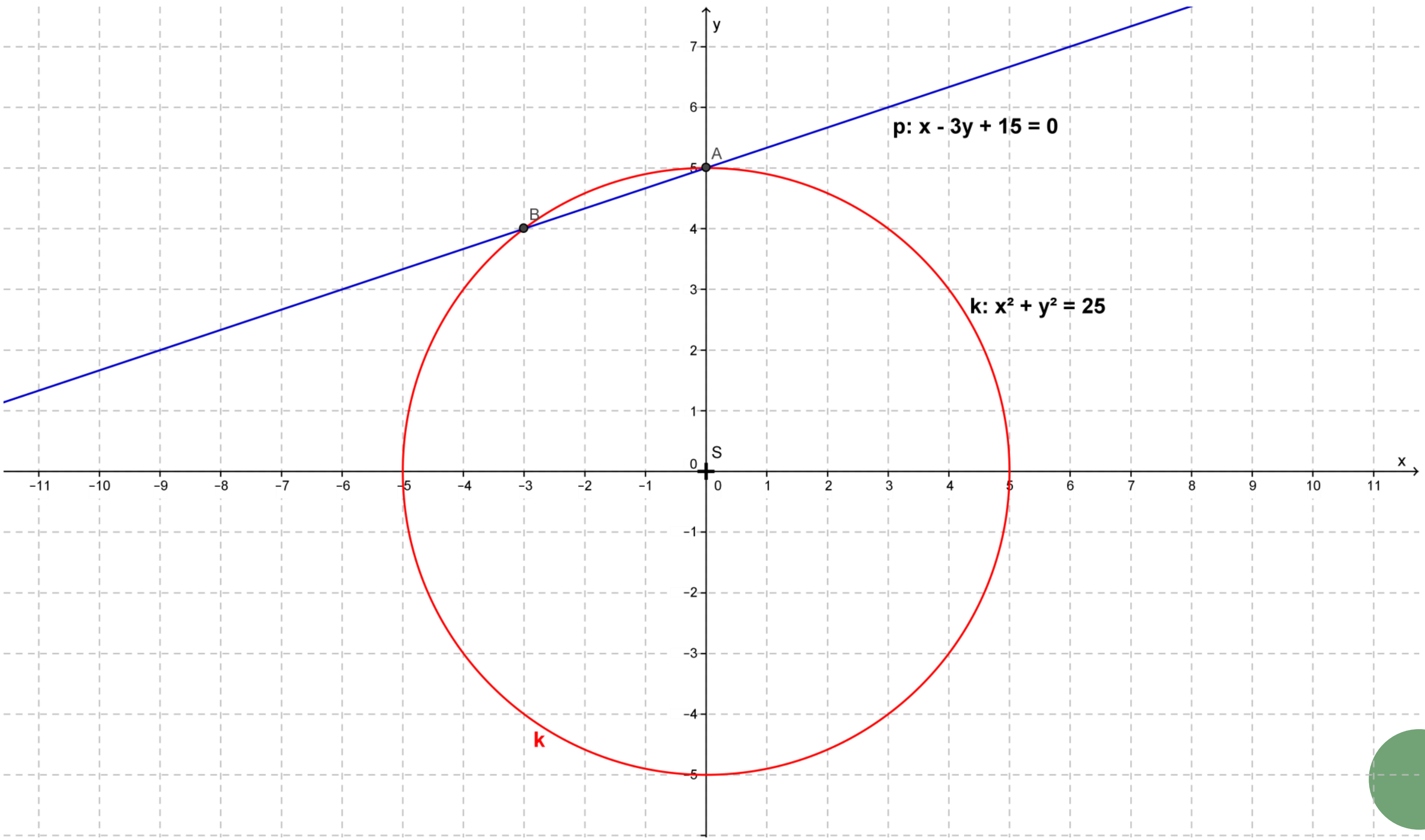
kořeny jsou: $y_1 = 4$, $y_2 = 5$

dopočítáme souřadnice $x_1 = -3$, $x_2 = 0$

přímka je sečnou kružnice $A[0, 5], B[-3, 4]$

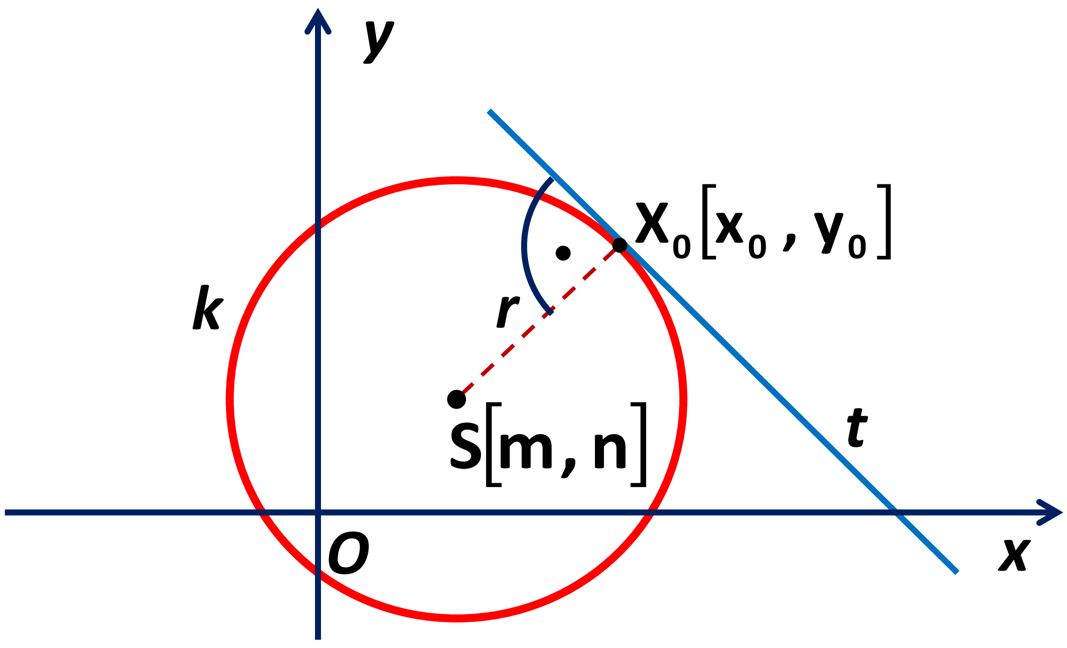
(společné body jsou A, B)

GRAFICKY



Tečna ke kružnici (graficky)

Předpokládejme, že máme kružnici *k* se středem $S[m, n]$ a poloměrem r. Bod $X_0[x_0, y_0]$ je bodem dotyku tečny *t* a kružnice *k*.



Rovnice tečny ke kružnici

Rovnice tečny *t* ke kružnici *k* se středem $S[m, n]$ a poloměrem r v bodě $X_0[x_0, y_0]$:

$$\boxed{(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2}$$

Rovnice tečny ke kružnici

Po algebraických úpravách

(a označení $p = m^2 + n^2 - r^2$)

můžeme rovnici tečny *t* napsat ve tvaru:

$$\boxed{x_0 x + y_0 y - m(x + x_0) - n(y + y_0) + p = 0}$$

Příklad č. 3

Je dána kružnice

k: **$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$**

a bod $K[2, 5]$. Přesvědčte se, že bod K leží na kružnici *k* a napište rovnici tečny ke kružnici *k* v tomto bodě.

Řešení č. 3 $\left(K \in k\right)$

Bod K$\left[2\,,\,5\right]$ leží na kružnici

k: **$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$, pokud jeho souřadnice po dosazení do rovnice kružnice vyhovují této rovnici:**

$L = 2^2 + 5^2 - 6 \cdot 2 - 4 \cdot 5 + 3 =$

$= 4 + 25 - 12 - 20 + 3 = 0$

$P = 0$; $L = P$

Bod K leží na kružnici *k*.

Řešení č. 3 (rovnice tečny)

Rovnici tečny napíšeme ve tvaru:

$$xx_0 + yy_0 - 3(x + x_0) - 2(y + y_0) + 3 = 0$$

Dosadíme souřadnice bodu K: $x_0 = 2; y_0 = 5$

$$2x + 5y - 3(x + 2) - 2(y + 5) + 3 = 0$$

$$2x + 5y - 3x - 6 - 2y - 10 + 3 = 0$$

$$-x + 3y - 13 = 0$$

Rovnice tečny: $\underline{t: \quad x - 3y + 13 = 0}$

Řešení č. 3(jiný způsob řešení)

Obecnou rovnici kružnice můžeme doplněním na úplný čtverec převést na středovou rovnici:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=10$$

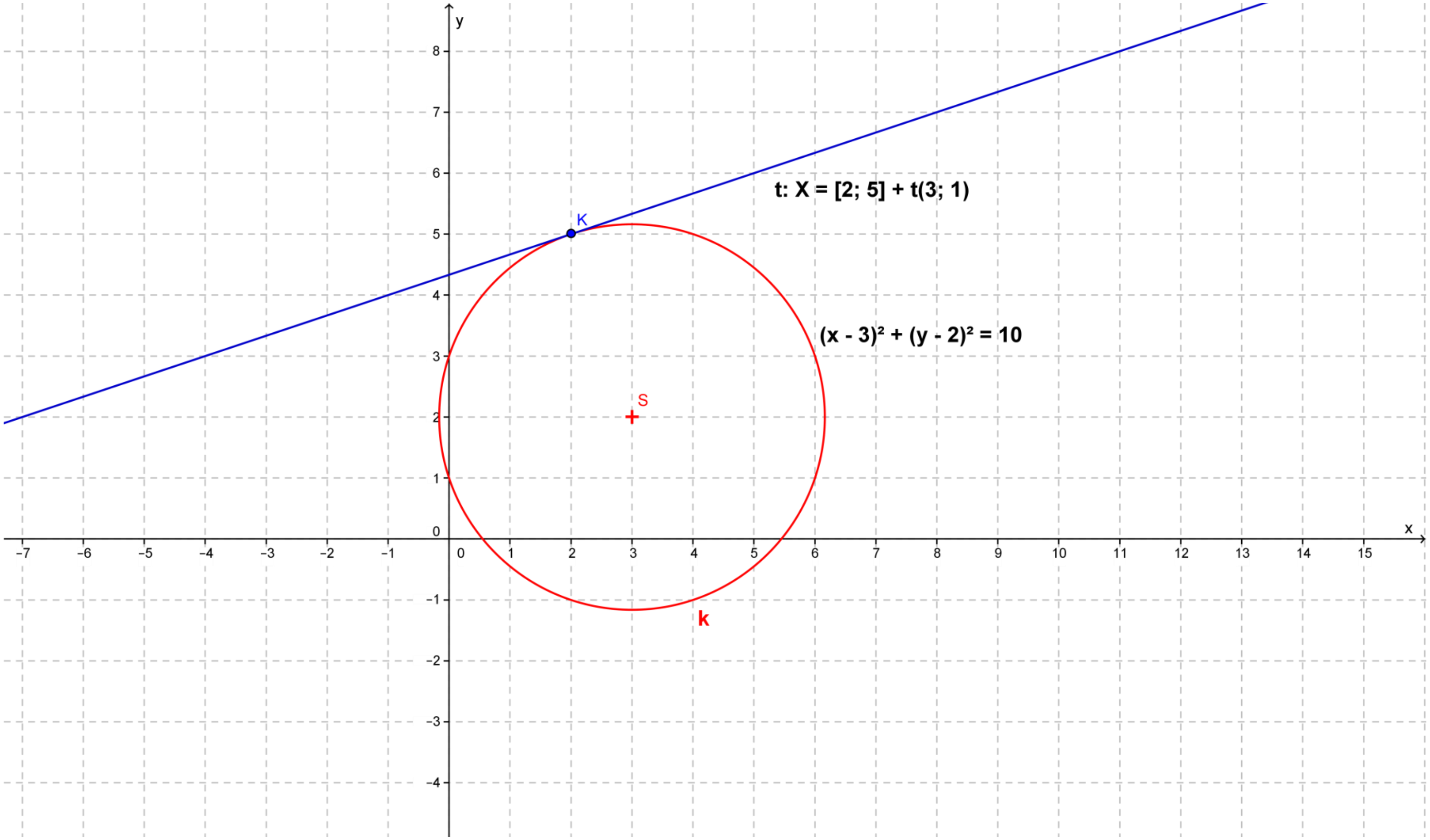
tečnu v bodě $K[x_0\,,\,y_0]$ můžeme vyjádřit takto:

$$(x_0-3)(x-3)+(y_0-2)(y-2)=10$$

po dosazení za $x_0=2;\,y_0=5$ dostaneme stejnou rovnici tečny jako v prvním případě:

$$t:\quad x-3y+13=0$$

Graficky



Seznam použité literatury

KOČANDRDLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Analytická geometrie*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-390-5

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 4.díl*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2007. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-139-0

***Obrázky* – zdroj: vlastní tvorba a program GeoGebra**