Projekt: **Digitální učební materiály ve škole, registrační číslo projektu CZ.1.07/1.5.00/34.0527**

Příjemce: Střední zdravotnická škola a Vyšší odborná škola zdravotnická, Husova 3, 371 60 České Budějovice

Název materiálu: Kuželosečky – elipsa

Autor materiálu: RNDr. Helena Jandová Datum (období) vytvoření: duben 2013

Zařazení materiálu:

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (III/2)

Předmět: Matematika, 3, 4. ročník

Sada: MA4

Číslo DUM: 17

Tematická oblast: Analytická geometrie

Ověření materiálu ve výuce:

Datum ověření: 17. 4. 2013

Ověřující učitel: RNDr. Helena Jandová

Třída: ZLY 4

Popis způsobu použití materiálu ve výuce: Výuka analytické geometrie ve 3. ročnících SZŠ a 4. ročnících zdravotnického lycea. Výuková elektronická prezentace, která je určena pro seznámení žáků s rovnicemi elipsy. Materiál může sloužit jako pomůcka doplňující výklad učitele, ale také je vhodná pro domácí přípravu žáků (např. zpřístupněním formou e-learningu). Materiál obsahuje zpětnou vazbu ověřující pochopení látky v podobě řešených příkladů.

Tento výukový materiál je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KUŽELOSEČKY

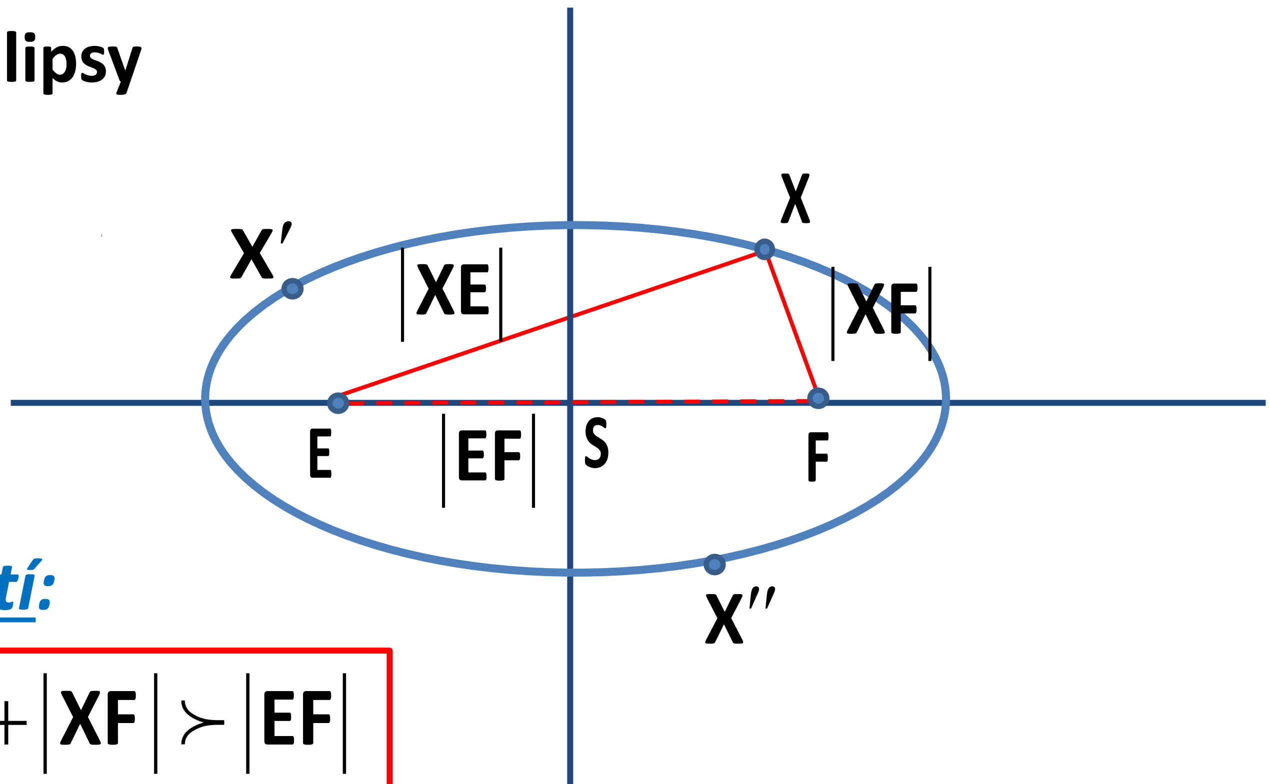
Elipsa

Elipsa

X …….. libovolný bod elipsy

E, F …. *ohniska elipsy*

S …….. střed elipsy



Pro elipsu platí:

$$\boxed{|XE| + |XF| \succ |EF|}$$

Definice elipsy

V rovině jsou dány dva body E, F.
Množina všech bodů X roviny, pro které se součet $|XE| + |XF|$ vzdáleností bodu X od bodů E, F rovná danému číslu většímu než $|EF|$, se nazývá *elipsa*.

Body E a F se nazývají *ohniska elipsy*.

ZÁKLADNÍ POJMY

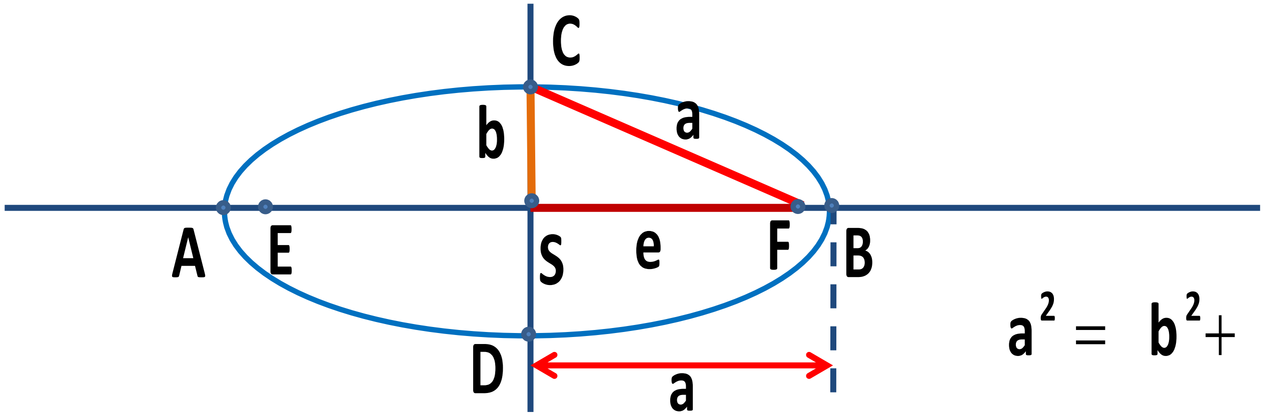
A, B …… hlavní vrcholy

C, D …… vedlejší vrcholy

a ….. hlavní poloosa $(a = |SA| = |SB|)$

b …. vedlejší poloosa $(b = |SC| = |SD|)$

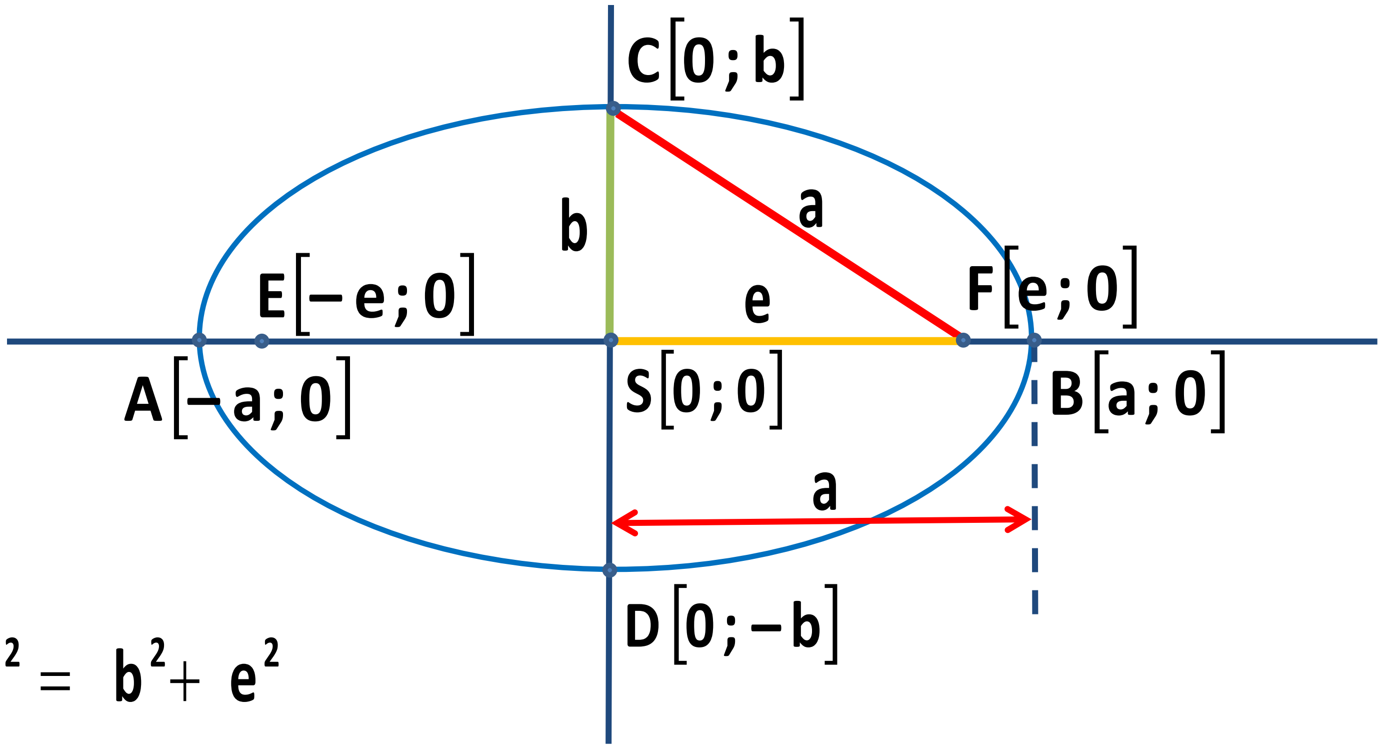
e …. výstřednost (excentricita) $(e = |SF| = |SE|)$



$a^2 = b^2 + e^2$

Souřadnice význačných bodů

vrcholů, ohnisek a středu elipsy:



$$a^2 = b^2 + e^2$$

STŘEDOVÁ ROVNICE ELIPSY (SE STŘEDEM V POČÁTKU)

Bod X[x, y] je bodem elipsy právě tehdy, když platí:

$$|XE| + |XF| = 2a\,; \quad (a = |SA| = |FC|)$$

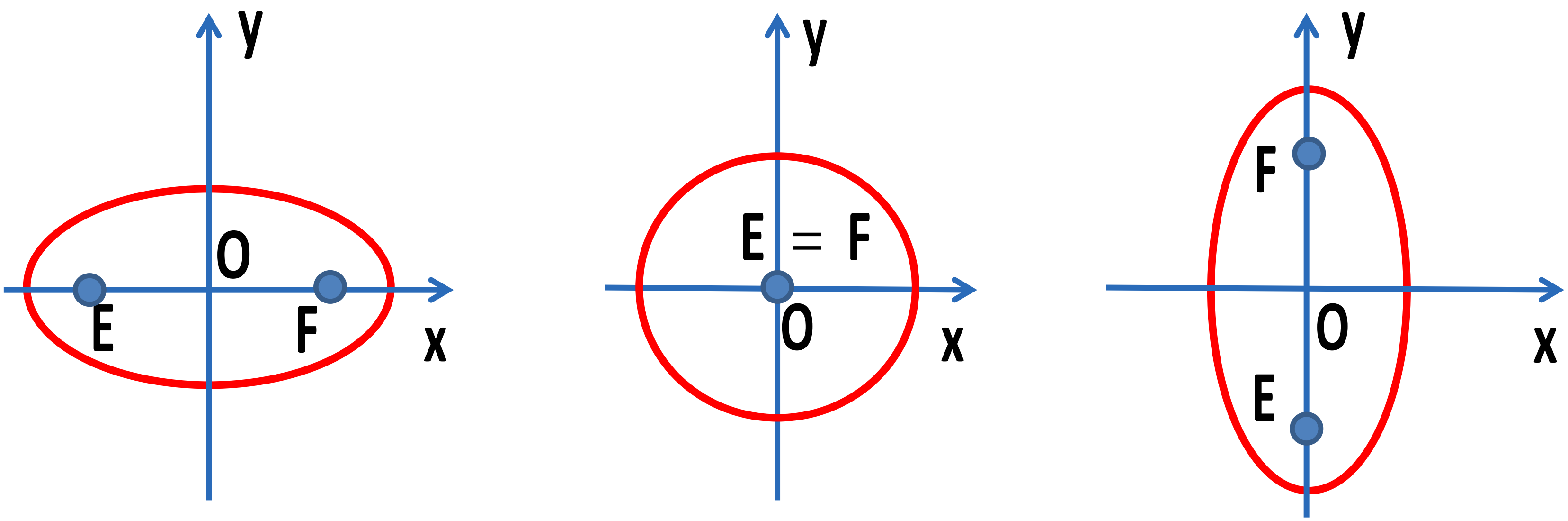
Leží-li ohniska E, F na ose x a *střed elipsy S je v počátku soustavy souřadnic:* O = S[0, 0] má *středová rovnice* tvar:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$(a \geq b \succ 0)$$

ZOBRAZENÍ ELIPSY V ZÁVISLOSTI NA a, b

Rovnice elipsy: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



a) $a \succ b$ b) $a = b$ c) $a \prec b$

Středová rovnice elipsy

Leží-li střed elipsy v bodě S[m, n] a platí-li $(a \geq b \succ 0)$, má *středová rovnice* tvar:

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1}$$

PŘÍKLAD Č. 1

Napište rovnici elipsy s ohnisky v bodech E[–1; 0] , F[1; 0], která prochází bodem M[1 ; $\frac{8}{3}$].

Postup řešení č. 1

Ze zadání: E[–1; 0] , F[1; 0], M[1; $\frac{8}{3}$]

určíme výstřednost: $e = 1$

dosadíme do rovnice $b^2 = a^2 - e^2$

tj. $b^2 = a^2 - 1$

elipsa má střed v počátku S[0; 0]

rovnici napíšeme ve tvaru: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Po dosazení: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$

Postup řešení č. 1

V rovnici *určíme délku hlavní poloosy* a víme, že na elipse leží bod M[1; $\frac{8}{3}$] ; jeho souřadnice dosadíme do rovnice elipsy:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2}{a^2 - 1} = 1$$

Rovnici řešíme substitucí: $a^2 = z$

Pro a^2 dostaneme : $a^2 = 9\ ;\ a^2 = \frac{1}{9}$

Řešení a odpověď č. 1

V případě, že $a^2 = \frac{1}{9}$ je b^2 záporné, což není možné;

řešení existuje jen pro $\underline{a^2 = 9}$, $b^2 = 8$;

Hledaná rovnice elipsy má tvar:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

Osová rovnice elipsy

Leží-li ohniska E, F na ose *x* a střed S splývá s počátkem soustavy souřadnic S = O, tj. platí: $a \geq b \succ 0$,

má *osová rovnice elipsy* tvar:

$$\boxed{b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2}$$

Obecná rovnice elipsy

Úpravou středové rovnice

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

Dostaneme *obecnou rovnici elipsy*:

$$\boxed{px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0}$$

$$(pq \succ 0)$$

Příklad č. 2

Ukažte, že rovnice:

$$9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$$

je obecná rovnice elipsy.

Určete její střed a vrcholy.

Postup řešení č. 2

Rovnici upravíme na středový tvar:

$$9x^2-54x+25y^2-100y-44=0$$

$$9\left[\left(x^2-6x+9\right)-9\right]+25\left[\left(y^2-4y+4\right)-4\right]-44=0$$

$$9\left(x-3\right)^2-81+25\left(y-2\right)^2-100-44=0$$

$$\frac{9\left(x-3\right)^2}{225}+\frac{25\left(y-2\right)^2}{225}=1$$

$$\frac{\left(x-3\right)^2}{5^2}+\frac{\left(y-2\right)^2}{3^2}=1$$

Řešení č. 2

Z rovnice elipsy

$$\frac{(x-3)^2}{5^2}+\frac{(y-2)^2}{3^2}=1$$

určíme střed S a poloosy:

S[3; 2]; a = 5; b = 3

Dopočítáme vrcholy:

A[–2; 2]; B[8; 2]; C[3; 5]; D[3; –1]

Seznam použité literatury

KOČANDRDLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Analytická geometrie*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy.

ISBN 978-80-7196-390-5

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 4.díl*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2007. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-139-0

Obrázky – zdroj: vlastní tvorba