Projekt: **Digitální učební materiály ve škole, registrační číslo projektu CZ.1.07/1.5.00/34.0527**

Příjemce: Střední zdravotnická škola a Vyšší odborná škola zdravotnická, Husova 3, 371 60 České Budějovice

Název materiálu: Kuželosečky – elipsa a přímka

Autor materiálu: RNDr. Helena Jandová

Datum (období) vytvoření: duben 2013

Zařazení materiálu:

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (III/2)

Předmět: Matematika, 3, 4. ročník

Sada: MA4

Číslo DUM: 18

Tematická oblast: Analytická geometrie

Ověření materiálu ve výuce:

Datum ověření: 22. 4. 2013

Ověřující učitel: RNDr. Helena Jandová

Třída: ZLY 4

Popis způsobu použití materiálu ve výuce: Výuka analytické geometrie ve 3. ročnících SZŠ a 4. ročnících zdravotnického lycea. Výuková elektronická prezentace, která je určena pro seznámení žáků s rovnicí elipsy a vzájemnou polohou elipsy a přímky. Materiál může sloužit jako pomůcka doplňující výklad učitele, ale také je vhodná pro domácí přípravu žáků (např. zpřístupněním formou e-learningu). Materiál obsahuje zpětnou vazbu ověřující pochopení látky v podobě řešených příkladů.

Tento výukový materiál je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KUŽELOSEČKY

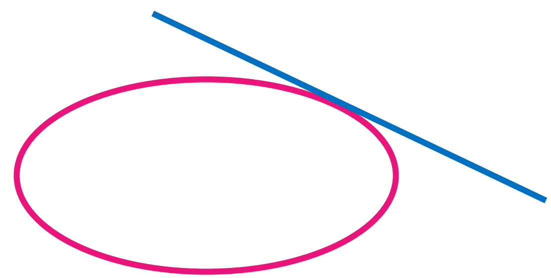
Elipsa a přímka

Vzájemná poloha elipsy a přímky

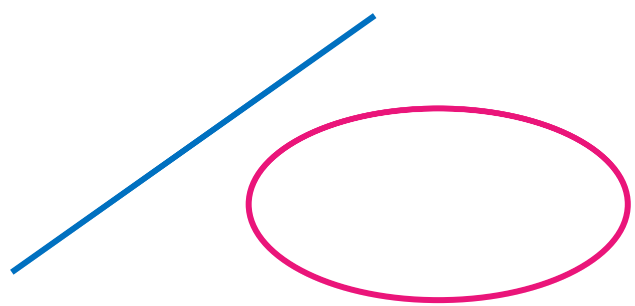
Z planimetrie víme, že mohou nastat tři případy:

Dva společné body (sečna)

Jeden společný bod (tečna)



Žádný společný bod (vnější přímka)



Matematicky

Určit vzájemnou polohu přímky a elipsy znamená:

řešit soustavu dvou rovnic – lineární a kvadratické.

řešení soustavy závisí na diskriminantu,

mohou nastat tři případy:

$D = 0$ jedno řešení – jeden společný bod

$D > 0$ dvě řešení – dva společné body

$D < 0$ žádné řešení – žádný společný bod

Příklad č. 1

Je dána přímka $4x + 5y - a = 0$

a elipsa $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Pro které a je daná přímka

a) tečnou

b) sečnou

c) nesečnou (vnější přímkou)

dané elipsy?

Postup řešení č. 1

Z rovnice přímky vyjádříme x (nebo y):

$$x = \frac{a - 5y}{4}$$

Dosadíme do rovnice elipsy:

$$9\left(\frac{a - 5y}{4}\right)^2 + 25y^2 = 225$$

$$9\left(a^2 - 10ay + 25y^2\right) + 16 \cdot 25y^2 = 16 \cdot 225$$

$$9a^2 - 90ay + 225y^2 + 400y^2 - 3600 = 0$$

$$625y^2 - 90ay + 9a^2 - 3600 = 0$$

Řešení č. 1

Vyjádříme diskriminant D:

$$D = (-90a)^2 - 4 \cdot 625 \cdot (9a^2 - 3600)$$

Po úpravě:

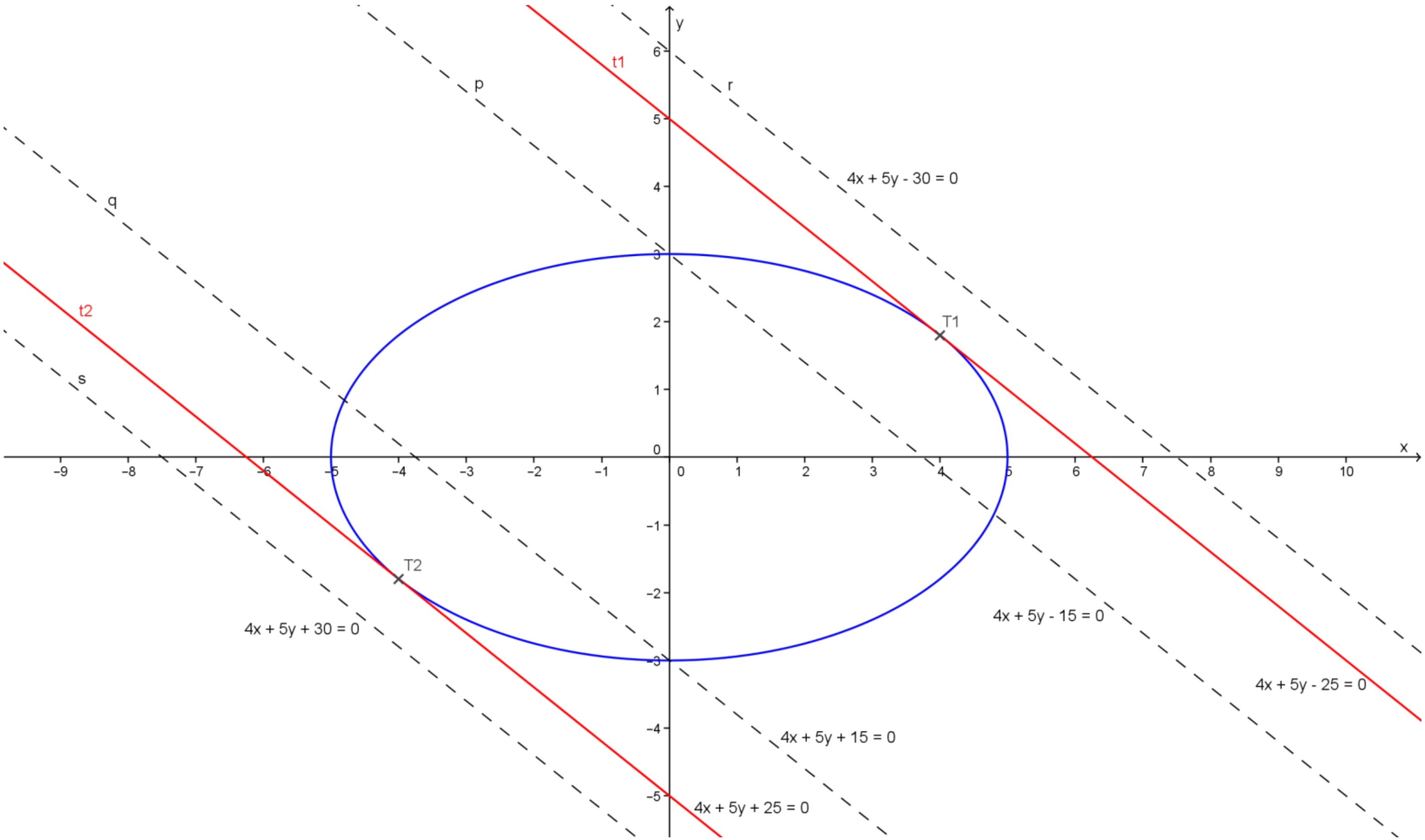
$$D = -144a^2 + 90\,000$$

a) pro tečnu: D = 0 , pak $\underline{|a| = 25}$

b) pro sečnu: D > 0 , pak $\underline{|a| \prec 25}$

c) pro nesečnu: D < 0 , pak $\underline{|a| \succ 25}$

ŘEŠENÍ Č. 1 – GRAFICKY



Tečna k elipse se středem v počátku S[0; 0]

Je-li bod $X_0[x_0; y_0]$ bodem elipsy se středem v počátku S = $O[0; 0]$:

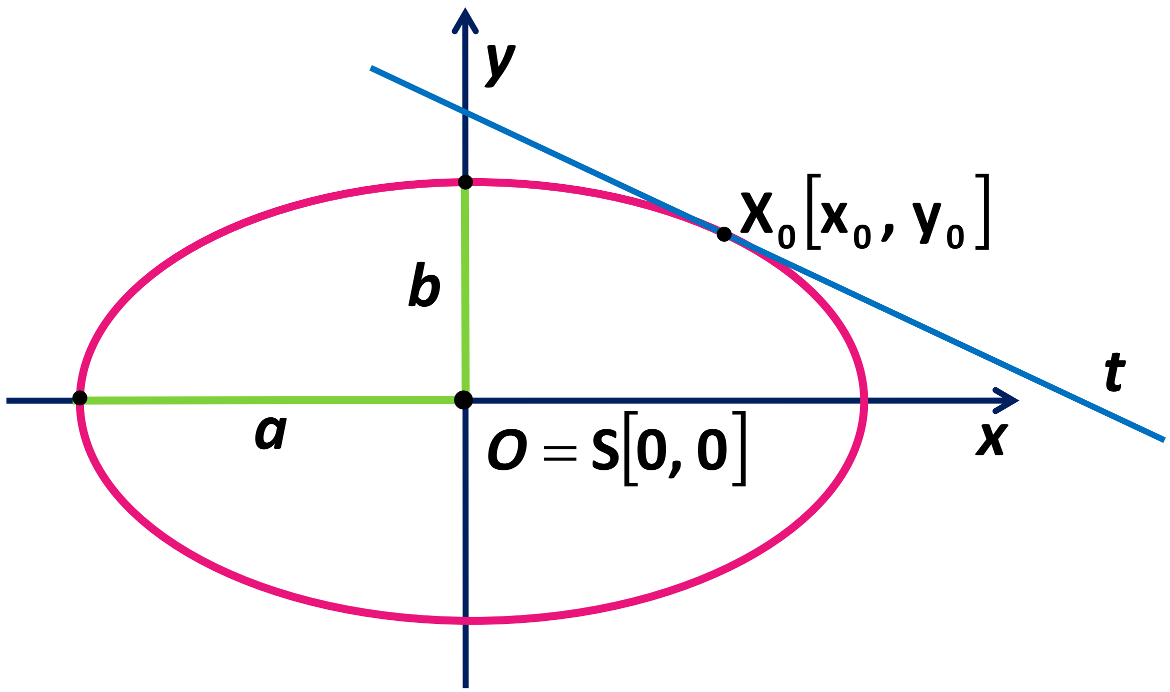
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Má ***tečna*** v tomto bodě rovnici:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Tečna k elipse středem v počátku (graficky)

Elipsa má střed v počátku $O = S[0, 0]$ a poloosy *a, b*. Bod $X_0[x_0, y_0]$ je bodem dotyku tečny *t* a elipsy.



Tečna k elipse v daném bodě X_0

Je-li bod $X_0[x_0; y_0]$ bodem elipsy

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

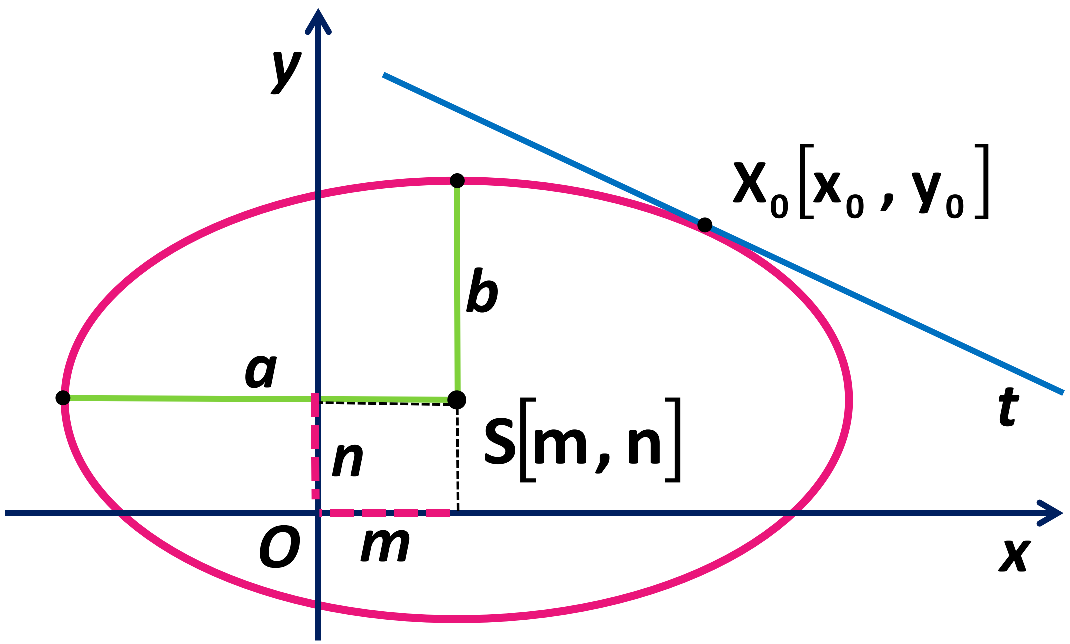
Má *tečna* v tomto bodě rovnici:

$$\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2}+\frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2}=1$$

Tečna k elipse v bodě X_0 (graficky)

Předpokládejme, že máme elipsu se středem $S[m, n]$ a poloosami *a, b*.

Bod $X_0[x_0, y_0]$ je bodem dotyku tečny *t* a elipsy.



Příklad č. 2

Ukažte, že bod H[6; –2] je bodem elipsy:

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{4(y+4)^2}{25}=1$$

Napište rovnici tečny elipsy v bodě H.

Postup řešení č. 2

Do rovnice elipsy dosadíme souřadnice bodu H[6; –2]:

$$L = \frac{(6-3)^2}{25} + \frac{4(-2+4)^2}{25} = \frac{3^2}{25} + \frac{4 \cdot 4}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$P = 1$$

$$\underline{\underline{L = P}}$$

Bod H je bodem elipsy.

Řešení č. 2

Souřadnice bodu H[6; –2] dosadíme do rovnice tečny: $\frac{(6-3)(x-3)}{25}+\frac{(-2+4)(y+4)}{\frac{25}{4}}=1$

Po úpravě: $\frac{3(x-3)}{25}+\frac{2\cdot 4(y+4)}{25}=1$

$$3x-9+8y+32=25$$

$$3x+8y-2=0$$

Rovnice hledané tečny: $t:\quad 3x+8y-2=0$

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

KOČANDRDLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Analytická geometrie*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy.

ISBN 978-80-7196-390-5

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 4.díl*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2007. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-139-0

***Obrázky* – zdroj: vlastní tvorba a program GeoGebra**