Projekt: **Digitální učební materiály ve škole, registrační číslo projektu CZ.1.07/1.5.00/34.0527**

Příjemce: Střední zdravotnická škola a Vyšší odborná škola zdravotnická, Husova 3, 371 60 České Budějovice

Název materiálu: Kuželosečky – Parabola a hyperbola

Autor materiálu: RNDr. Helena Jandová

Datum (období) vytvoření: duben 2013

Zařazení materiálu:

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (III/2)

Předmět: Matematika, 3, 4. ročník

Sada: MA4

Číslo DUM: 19

Tematická oblast: Analytická geometrie

Ověření materiálu ve výuce:

Datum ověření: 29. 4. 2013

Ověřující učitel: RNDr. Helena Jandová

Třída: ZLY 4

Popis způsobu použití materiálu ve výuce: Výuka analytické geometrie ve 3. ročnících SZŠ a 4. ročnících zdravotnického lycea. Výuková elektronická prezentace, která je určena pro seznámení žáků s rovnicí a grafy paraboly a hyperboly. Materiál může sloužit jako pomůcka doplňující výklad učitele, ale také je vhodná pro domácí přípravu žáků (např. zpřístupněním formou e-learningu). Materiál obsahuje zpětnou vazbu ověřující pochopení látky v podobě řešených příkladů.

Tento výukový materiál je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KUŽELOSEČKY

Parabola a hyperbola

PARABOLA (DEFINICE)

Parabola

je množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu *F* a od dané přímky *q*, která tímto bodem neprochází.

***F* ………. ohnisko**

***q* ………. řídící přímka**

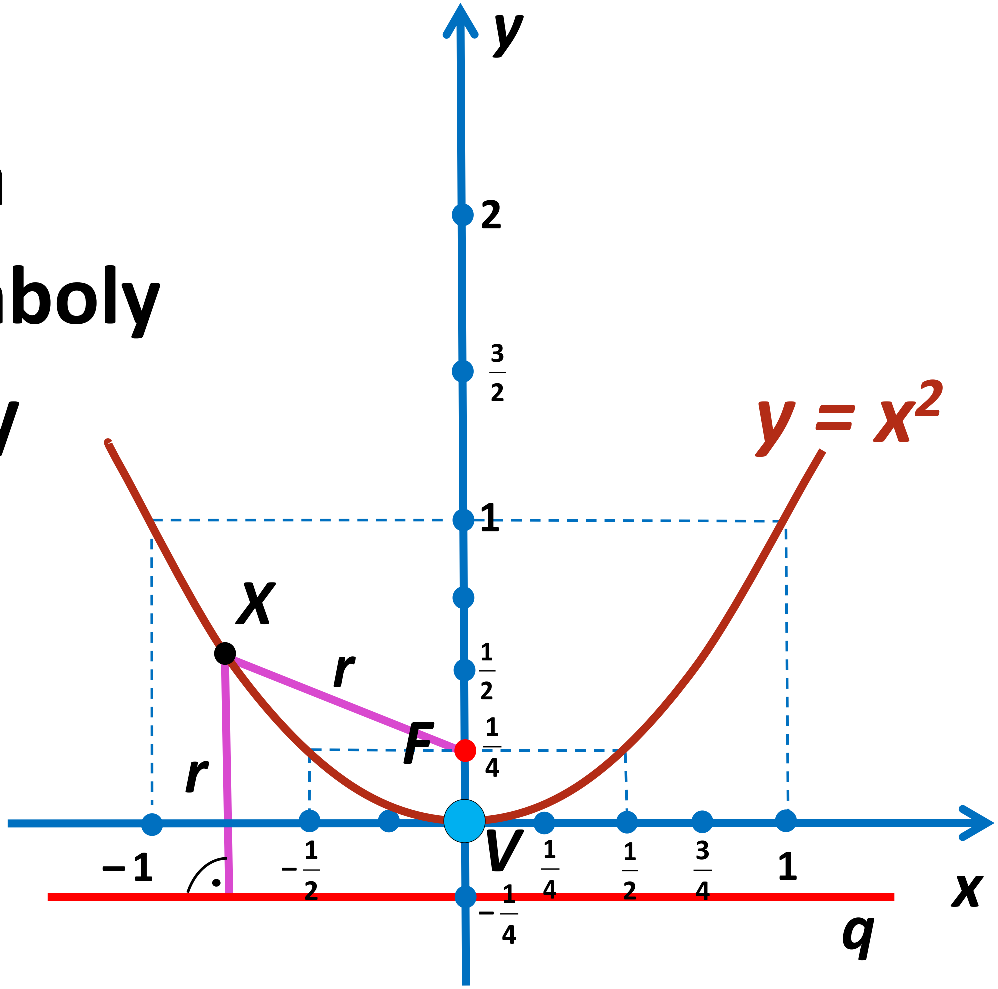
PARABOLA GRAFICKY

F …… ohnisko

q …… řídící přímka

V ……. vrchol paraboly

X ….. bod paraboly



Příklad č. 1

Ukažte, že graf funkce f: y = x^2 je totožný s množinou všech bodů roviny, které mají od bodu F[0; $-\frac{1}{4}$] stejnou vzdálenost

Jako od přímky $q: \quad y = -\frac{1}{4}$

Řešení č. 1

Bod X[x ; y] má od bodu F[0; $-\frac{1}{4}$] a od přímky *q* : $y = -\frac{1}{4}$ stejnou vzdálenost právě, když platí:

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\left|y + \frac{1}{4}\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

Po úpravě:

$$x^2 + \cancel{y^2} - \frac{y}{2} + \cancel{\frac{1}{16}} = \cancel{y^2} + \frac{y}{2} + \cancel{\frac{1}{16}}$$

$$\underline{\underline{y = x^2}}$$

Rovnice paraboly (s vrcholem v počátku V[0; 0])

Rovnice $x^2 = 2py$ $(p > 0)$

je rovnicí paraboly s ohniskem $F[0; \frac{p}{2}]$,

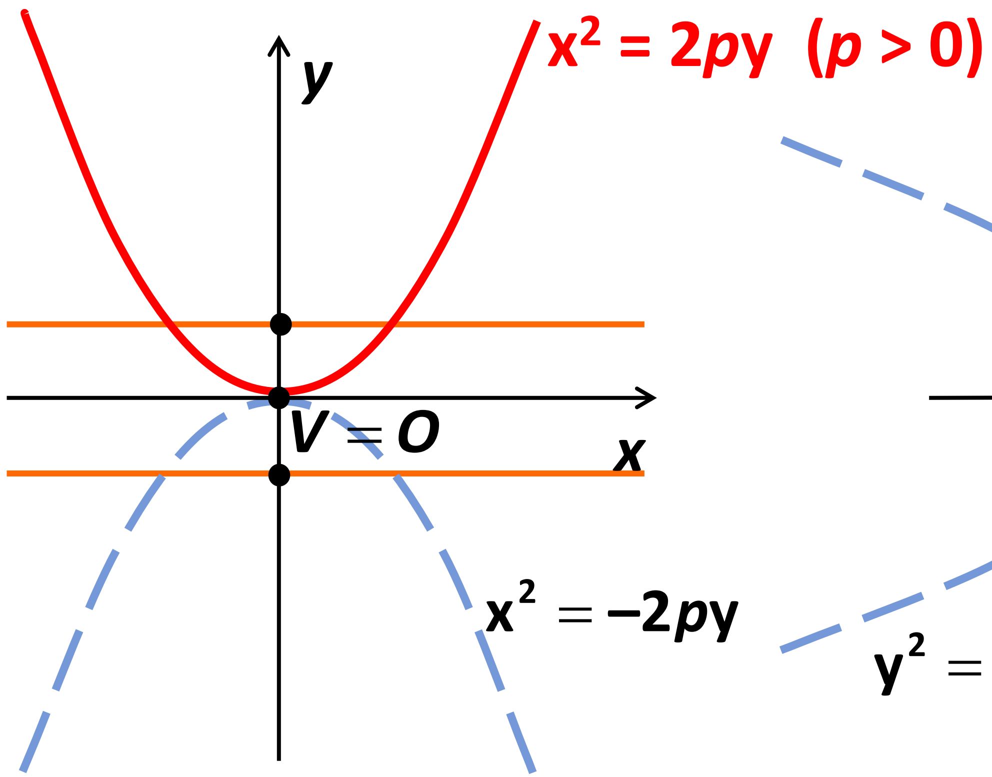
řídící přímkou $q: y = -\frac{p}{2}$

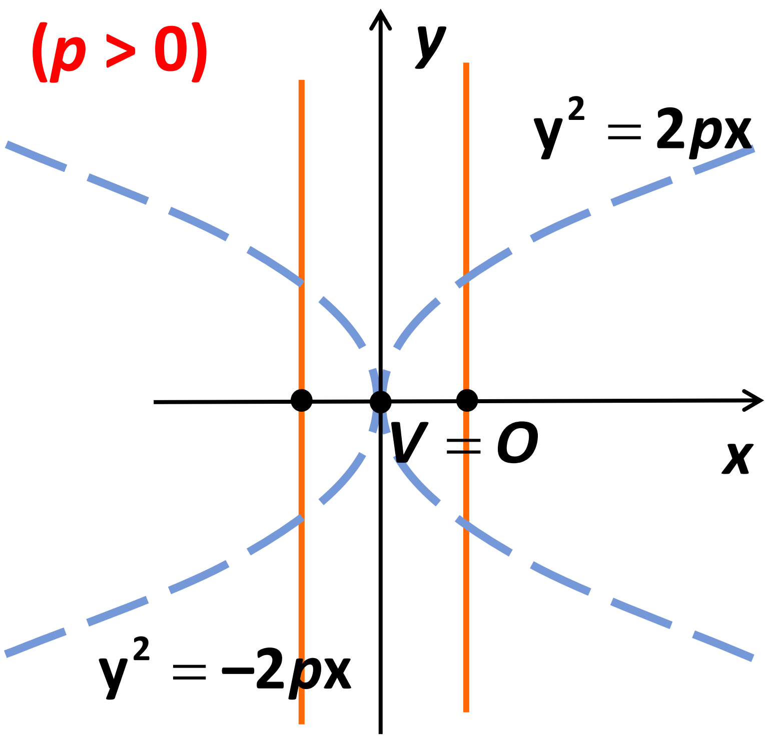
a vrcholem V[0; 0] .

Osa y soustavy souřadnic je pak osou paraboly; parabola leží celá v polorovině $y \geqq 0$

Graficky

Vrchol paraboly V[0; 0] je v počátku soustavy souřadnic (V = O).





Vrcholové rovnice paraboly

$$(x-m)^2 = \pm 2p(y-n)$$

$$(y-n)^2 = \pm 2p(x-m)$$

Poznámka:

nazýváme je tak proto, že z nich okamžitě vyčteme vrchol V[m; n] paraboly

Obecné rovnice paraboly

$$x^2 + 2rx + 2sy + t = 0 \quad (s \neq 0)$$

$$y^2 + 2rx + 2sy + t = 0 \quad (r \neq 0)$$

Poznámka:

obecné rovnice dostaneme úpravou vrcholových rovnic

HYPERBOLA (DEFINICE)

V rovině jsou dány dva různé body E, F. Množina všech bodů X roviny, pro které se $\left||XE|-|XF|\right|$ rovná danému kladnému číslu, které je menší než $|EF|$ se nazývá *hyperbola*.

Body E a F se nazývají *ohniska hyperboly*.

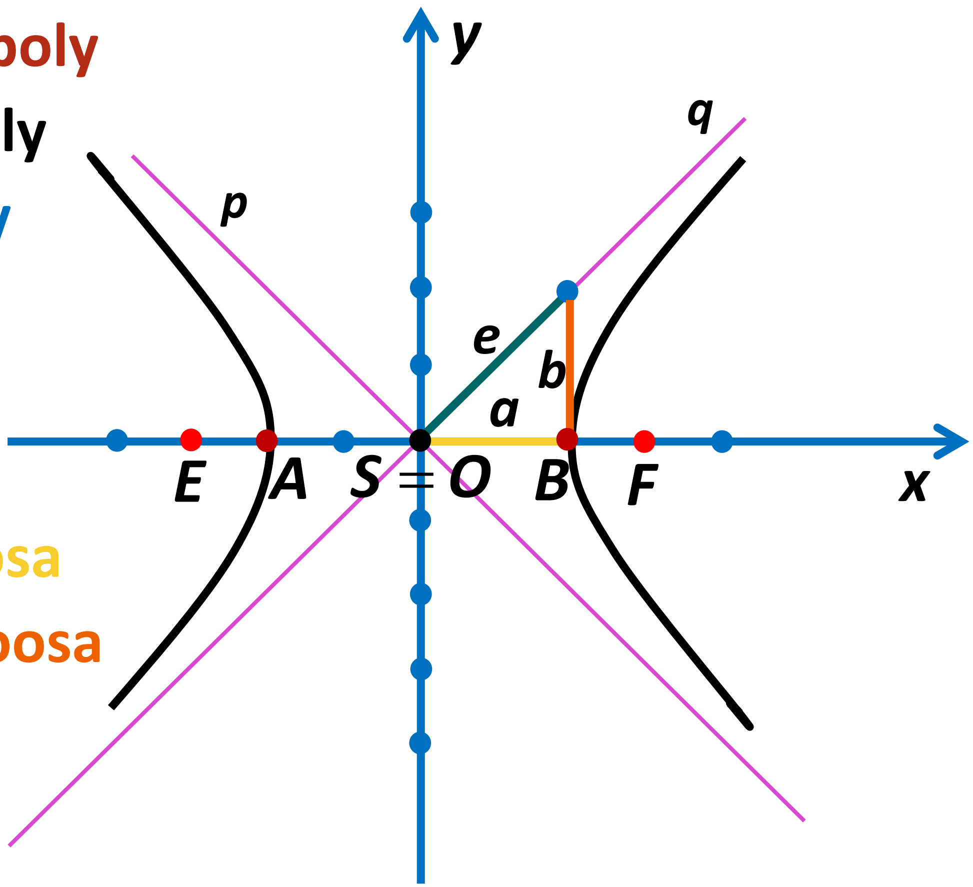
HYPERBOLA GRAFICKY

E, F ….. ohniska

A, B …. vrcholy hyperboly

S …….. střed hyperboly

x ………. osa hyperboly



a ………. hlavní poloosa

b ………. vedlejší poloosa

e ………. excentricita

p, q …….. asymptoty

Středové rovnice hyperboly

Střed hyperboly v bodě S[m; n]

1. **Osa hyperboly rovnoběžná s osou x:**

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

2. **Osa hyperboly rovnoběžná s osou y:**

$$\frac{(y-m)^2}{b^2} - \frac{(x-n)^2}{a^2} = 1$$

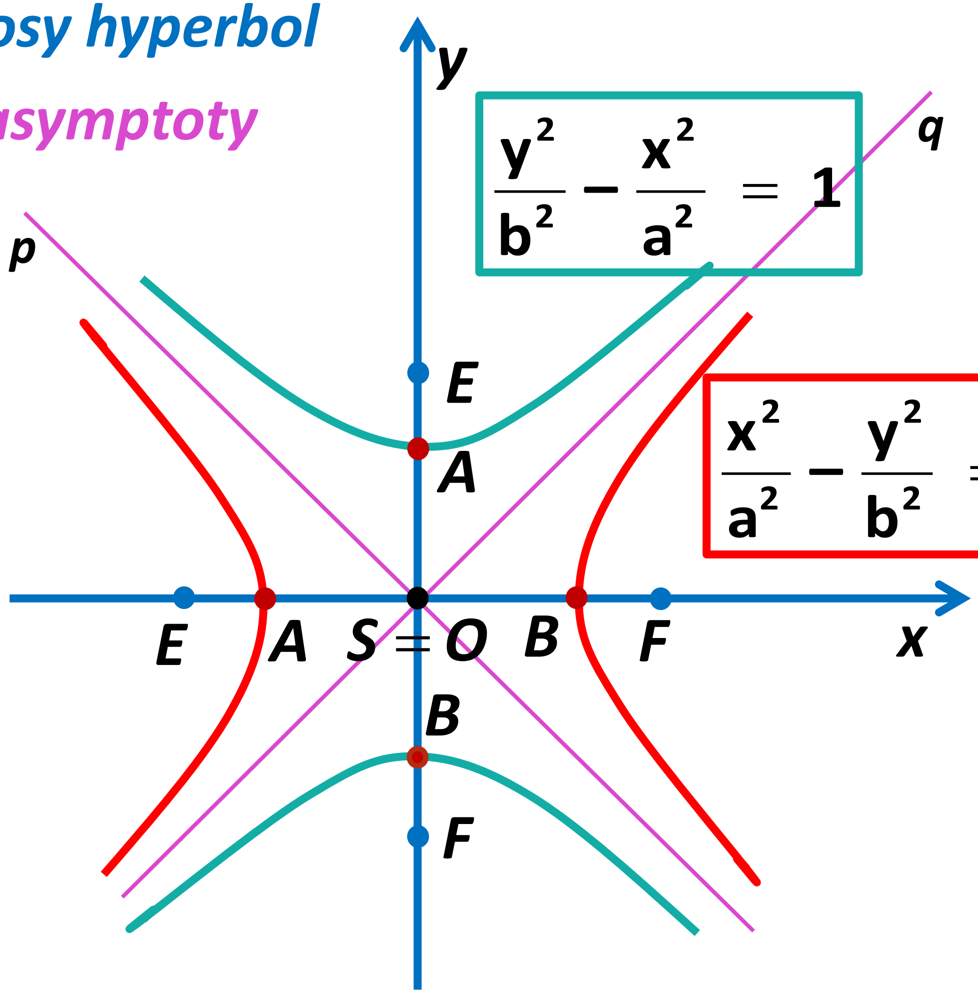
Poznámka:

je-li střed v počátku soustavy souřadnic, platí: m = n = 0

GRAFICKY (STŘED HYPERBOLY V POČÁTKU: S = O)

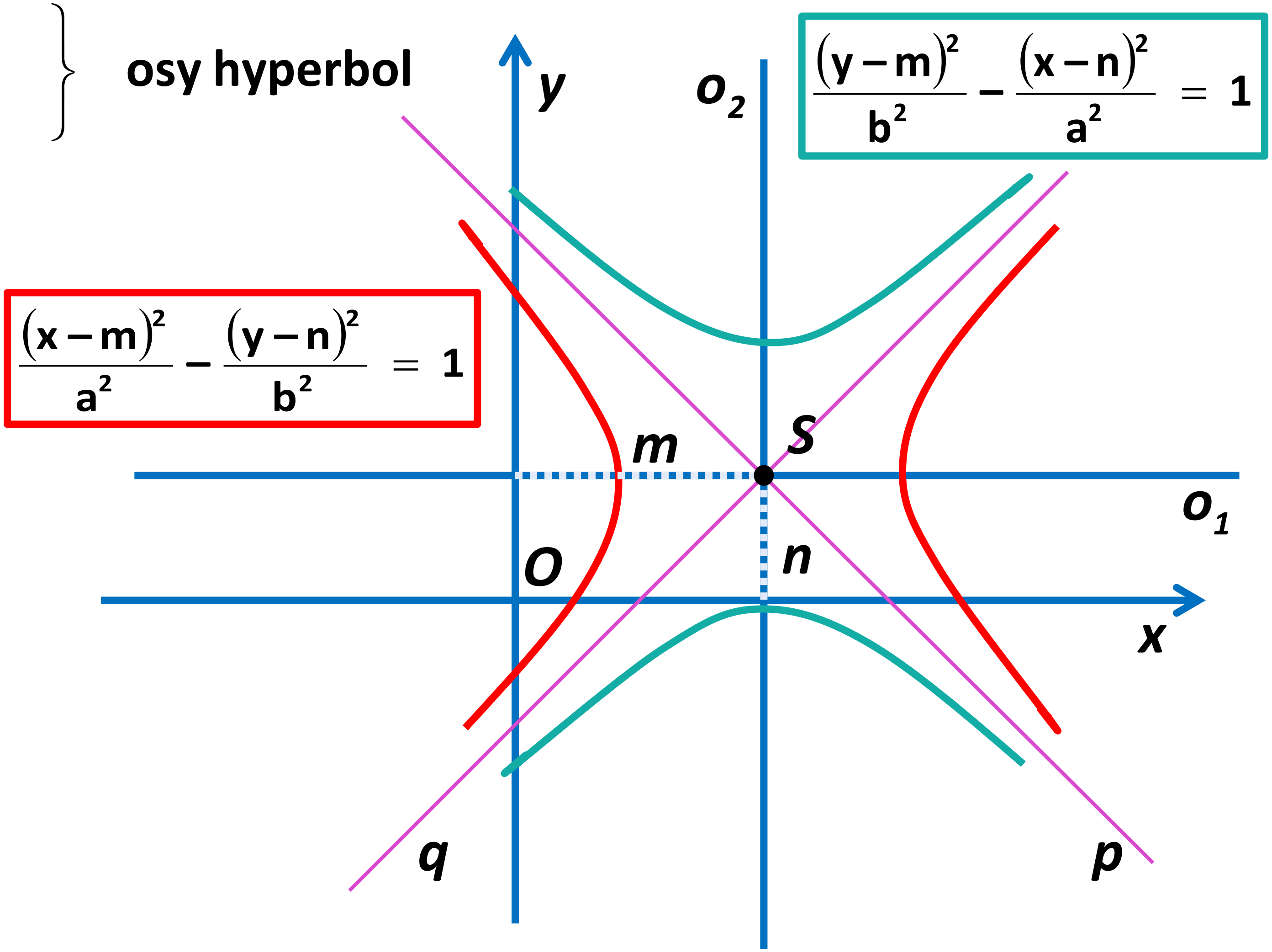
x, y …. *osy hyperbol*

p, q …. *asymptoty*



GRAFICKY (STŘED HYPERBOLY V BODĚ $S[m, n]$)

$\left.\begin{array}{l} o_1 \parallel x \\ o_2 \parallel y \end{array}\right\}$ osy hyperbol



Asymptoty hyperboly

- **přímky *p, q*, které procházejí středem hyperboly, svírají obě ramena hyperboly, nemají s hyperbolou žádný společný bod**
- **jsou-li navzájem kolmé (a = b), nazývá se hyperbola *rovnoosá***
- **rovnice asymptot:**

$$\boxed{\frac{x-m}{a} = \pm \frac{y-n}{b}}$$

Poznámka:

je-li střed v počátku S = O, je v rovnici $m = n = 0$

OBECNÁ ROVNICE HYPERBOLY

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0 \quad (pq \prec 0)$$

Poznámky:

1. **danou rovnici dostaneme úpravou libovolné středové rovnice hyperboly (viz snímek č. 13)**

2. **součin pq je záporný ($pq \prec 0$) tzn. jedno z čísel p nebo q musí být záporné**

Příklad č. 2

Zjistěte, zda daná rovnice:

$$9x^2 - 16y^2 - 90x - 64y + 17 = 0$$

je rovnicí hyperboly.

Je-li tomu tak, určete její střed a poloosy.

Postup řešení č. 2

Obecnou rovnici upravíme na středovou:

$$9x^2 - 16y^2 - 90x - 64y + 17 = 0$$

$$9\left(x^2 - 10x\right) - 16\left(y^2 + 4y\right) + 17 = 0$$

$$9\left[\left(x^2 - 10x + 25\right) - 25\right] - 16\left[\left(y^2 + 4y + 4\right) - 4\right] + 17 = 0$$

$$9\left(x - 5\right)^2 - 225 - 16\left(y + 2\right)^2 - 64 + 17 = 0$$

$$9\left(x - 5\right)^2 - 16\left(y + 2\right) = 144$$

$$\frac{\left(x - 5\right)^2}{16} - \frac{\left(y + 2\right)^2}{9} = 1$$

Řešení č. 2

Ze středové rovnice:

$$\frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x-5)^2}{4^2} - \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$$

určíme střed a poloosy:

S[5; –2]

a = 4   hlavní poloosa

b = 3   vedlejší poloosa

Seznam použité literatury

KOČANDRDLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Analytická geometrie*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy.

ISBN 978-80-7196-390-5

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 4.díl*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2007. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-139-0

Obrázky – zdroj: vlastní tvorba